Yves Berthaud
Patrick de Buhan
Nicolas Schmitt

Aide-mémoire de MÉCANIQUE DES SOLS



2e édition

- Caractérisation des sols et des roches
- Théorie du calcul à la rupture
- Outils de dimensionnement des ouvrages



Illustration de couverture : © bajita111122 – Fotolia.com



978-2-10-059354-5

Table des matières

D

Comportement hydro-mécanique des sols

E

Caractérisation expérimentale en laboratoire du comportement hydro-mécanique des sols

F

Un exemple de modèle de comportement : Cam Clay

G

Théorie du calcul à la rupture appliquée à la mécanique des sols

H

Stabilité des pentes et talus

I
Capacité portante des fondations superficielles

J
Calculs de poussée et de butée

Avant-propos

La **géotechnique** est une discipline qui regroupe des méthodes et des outils de caractérisation et de dimensionnement issus des sciences appliquées et des techniques en relation avec les sols et les terrains sur lesquels l'ingénieur s'appuie pour construire les ouvrages du Bâtiment et des Travaux Publics. Ce vaste domaine fait appel aux disciplines suivantes :

- **La géologie**. Elle est nécessaire pour évaluer la nature du terrain sur lequel les ouvrages sont construits. Elle revêt une importance particulière dans les ouvrages d'art, les tunnels, les bâtiments de grande hauteur car les charges transmises se diffusent dans le sol sur une zone étendue, tant en largeur qu'en profondeur.
- **La mécanique des solides et des fluides**. Cette discipline est indispensable pour évaluer les actions que les ouvrages transmettent au sol, les contraintes mécaniques dans le sol générées par ces actions. Elle permet de s'assurer que le sol reprenne ces actions dans de bonnes conditions.
- **La topographie**. Elle permet de construire une représentation de la topologie du terrain sur lequel l'ouvrage sera construit.
- **La chimie**. Cette discipline est mineure dans le cas de la construction des ouvrages courants (petits bâtiments). Elle est très présente dans le cas des ouvrages plus importants car nécessaire pour évaluer l'évolution du terrain en présence d'un environnement qui parfois peut être agressif pour le sol (par exemple la dissolution de roche par suite de la modification de l'écoulement de l'eau dans le terrain suite à la construction d'ouvrages).
- **Les techniques des travaux et de construction**. Cette discipline regroupe l'ensemble des outils d'ingéniérie qui permettent de choisir les solutions technologiques mises en œuvre pour assurer la stabilité et la pérénité des ouvrages, sur la base de critères technologiques et financiers.

La conception de l'ancrage d'un ouvrage dans un environnement géologique pose souvent plus de problèmes que la conception de l'ouvrage même. Souvent, on ne dispose que d'une connaissance partielle ou imparfaite du terrain et des actions que l'ouvrage exerce sur le sol, ou de l'évolution de la configuration future du terrain (e.g., la construction d'autres ouvrages à proximité).

Par ailleurs, il n'est souvent pas possible ou nécessaire d'utiliser toute la panoplie des outils que les sciences appliquées mettent aujourd'hui à notre disposition pour dimensionner les ouvrages, pour les raisons évoquées précédemment ou simplement parce que l'importance de l'ouvrage ne le justifie pas. Le concepteur doit néanmoins trouver des réponses à certaines interrogations soit en phase de dimensionnement de l'ouvrage, soit lors de sa vérification.

En phase de dimensionnement, les questions les plus courantes auxquelles les bureaux d'études doivent répondre sont les suivantes :

- Comment reporter les charges d'une structure sur le terrain (ou réciproquement) par l'intermédiaire d'une interface qui garantisse la stabilité mécanique de l'ouvrage dans le temps (fondation, tunnel) ?
- Quelles sont les actions exercées par le sol sur l'ouvrage (tranchées, murs de soutènement) ?
- Comment réaliser des terrassements offrant toutes les garanties de stabilité dans le temps et par voie de conséquence de stabilité des ouvrages ?

En phase de vérification, les questions que les bureaux de contrôle se posent sont un peu différentes dans la mesure où l'ouvrage est déjà défini :

- La transmission des charges entre l'ouvrage et et terrain est-elle assurée en garantissant la stabilité mécanique de l'ouvrage et sa tenue dans le temps ?
- Quels sont les outils les plus appropriés pour effectuer ces vérifications ?

Répondre à ces interrogations suppose que le géotechnicien possède de multiples connaissances qu'il doit mobiliser à différentes étapes de l'étude géotechnique :

- de nature naturaliste : il doit savoir reconnaître le sol et les terrains ;
- d'expérimenteur : il doit connaître et mettre en oeuvre les essais pour caractériser le sol ;
- de conception mécanique : il doit maîtriser les outils de la mécanique des milieux continus afin de déterminer les sollicitations sur le sol et l'ouvrage et vérifier que le sol et l'ouvrage restent stables ;
- de technicien : il doit maîtriser les techniques de construction et d'organisation de chantier qui sont indispensables pour proposer des solutions économiquement viables.

On mesure donc ici l'étendue très vaste de compétences qu'un géotechnicien doit acquérir pour devenir opérationnel. C'est à la fois une difficulté mais qui, une fois surmontée, permet ensuite d'exercer un métier passionnant aux multiples facettes.

Ce livre n'a pas pour ambition de couvrir tous ces champs disciplinaires. Une littérature déjà riche permet au futur géotechnicien de se former de manière efficace. Il s'inscrit dans une démarche différente. Il se focalise sur certains aspects de la mécanique des sols et des structures. En effet, à travers leur expérience d'enseignants, les auteurs ont pris conscience de la difficulté de proposer une approche unifiée du dimensionnement des ouvrages. De grands ingénieurs sont associés à certaines méthodes de calcul. Parfois plusieurs méthodes cohabitent pour dimensionner un ouvrage (e.g., mur de soutènement), sans qu'il soit toujours possible de justifier rigoureusement que telle méthode ou telle autre est meilleure. Elles sont alors davantage perçues comme des recettes de cuisine que comme une méthode rigoureuse.

Le législateur lui-même n'a visiblement pas souhaité prendre partie dans certains cas, laissant la possibilité de choisir telle ou telle méthode. Une des raisons de ce constat provient sans doute du fait que ces méthodes ne sont pas inscrites dans les dernières avancées scientifiques de la mécanique, ou alors elles le sont déjà mais restent confidentielles, réservées à la communauté scientifique qui travaille sur ces sujets.

Les auteurs considèrent que les conditions sont aujourd'hui réunies pour proposer un ouvrage de mécanique des sols, accessible à un niveau fin de licence, plutôt master ou ingénieur dans la pratique, qui organise certains de ces concepts pour en faire une présentation unifiée. Les outils numériques dont l'usage se développent devraient à l'avenir faciliter ce travail d'appropriation et achever de convaincre les lecteurs d'utiliser des concepts et des méthodes plus modernes pour dimensionner les ouvrages.

L'ouvrage est décomposé en plusieurs grandes parties :

A *Conception des ouvrages et reconnaissance des terrains*, expliquant sommairement le contexte d'une étude géotechnique et les essais de reconnaissance in situ qui fournissent des données sur le sol.

B *Caractérisation des sols et des roches*, permettant de décrire un sol en particulier argileux et de donner les paramètres classiques utiles par la suite.

C *Éléments de mécanique des sols, vus comme des milieux continus*, avec les rappels essentiels pour la compréhension de la suite de l'ouvrage et quelques informations sur la résolution d'un problème d'élasticité et d'élasto-plasticité.

D *Comportement hydro-mécanique des sols*, présentant l'hydraulique des matériaux et des sols, mais aussi la poroélasticité support de la notion de contrainte effective avec les applications classiques de consolidation.

E *Caractérisation expérimentale en laboratoire du comportement hydro-mécanique des sols*, présentant les essais classiques de laboratoire et les traits essentiels du comportement des matériaux.

F *Un exemple de modèle de comportement*, consacré essentiellement au modèle de Cam Clay devenu une référence pour les sols et qui s'inscrit dans un cadre conceptuel bien connu.

G *Théorie du calcul à la rupture*, permettant de comprendre les concepts à travers un exemple et illustrant les différentes approches présentées, statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur, par des applications.

H *Stabilité des pentes et talus*, un problème classique traité usuellement par des méthodes approchées mises en défaut dans de nombreux cas concrets. Le calcul à la rupture permet alors un traitement unifié et rigoureux des problèmes concrets de l'ingénieur.

I *Capacité portante des fondations superficielles*, constituant une autre application naturelle du calcul à la rupture avec les deux approches statique et/ou cinématique qui permettent d'encadrer la solution.

J *Calculs de poussée et de butée*, notions de base abordées ici comme conséquence immédiate d'une vision calcul à la rupture.

Le lecteur connaissant déjà la mécanique des sols et des ouvrages sera peut-être étonné de ne pas trouver le calcul des fondations profondes ou d'autres aspects importants pour le dimensionnement. Le choix fait a été de conserver ce qui permet un traitement unifié et cohérent et d'éliminer ce qui résulte d'une pratique codifiée. Nous renvoyons le lecteur à tous les livres ou documents techniques qui existent.



Conception des ouvrages et reconnaissance des terrains

La construction des éléments d'interface entre l'ouvrage et le terrain (appelé ouvrages géotechniques) doit être réalisée pour que les efforts exercés par l'ouvrage sur le terrain ne produisent de désordres au cours du temps qui pourraient nuire au bon usage de l'ouvrage.

Deux types d'exigences doivent être respectées (voir l'Eurocode 0 « Bases de calcul des structures ») :

1. Pendant sa durée de vie escomptée avec des niveaux de fiabilité appropriés et de façon économique, la structure doit être conçue et réalisée de telle sorte qu'elle résiste à toutes les actions et influences susceptibles d'intervenir pendant son exécution et son utilisation et qu'elle reste adaptée à l'usage pour lequel elle a été conçue.
2. La structure doit être conçue de telle sorte qu'elle ne soit pas endommagée de façon disproportionnée par rapport à la cause initiale par des événements exceptionnels tels une explosion, un séisme et les conséquences d'erreurs humaines.

La conception des éléments s'appuie sur des règles de dimensionnement, elle-même établies à l'échelle européenne par les Eurocodes. Nous présentons dans cette partie quelques points à prendre en compte lors de l'élaboration du rapport géotechnique, document contractuel obligatoire accompagnant le dimensionnement de l'ouvrage. Pour établir ce rapport, il est nécessaire de disposer d'informations sur la nature du terrain sur lequel est fondé l'ouvrage. Nous présenterons donc également assez succinctement les techniques de reconnaissance du terrain qui répondent à cette attente, sachant qu'il existe aujourd'hui une littérature abondante détaillant ces différentes techniques.



1 Méthodologie pour le dimensionnement d'un ouvrage

1.1 Approche de la sécurité des constructions

Le degré de sureté de l'ouvrage géotechnique est évalué par une approche probabiliste ou semi probabiliste. Il s'agit de s'assurer que la probabilité de ruine d'un ouvrage est inférieure à un seuil donné. Ce seuil dépend de multiples facteurs comme la durée de vie escomptée de l'ouvrage, les conséquences engendrées par sa ruine, les risques d'obsolescence, et des critères économiques.

Si des outils de simulation statistique comme la méthode de Monte-Carlo sont acceptés sous certaines conditions, l'approche semi-probabiliste est celle qui est la plus utilisée. L'utilisation de cette dernière nécessite de définir des valeurs représentatives des grandeurs aléatoires (actions et résistances), d'introduire des coefficients partiels établis en tenant à la fois compte d'une approche purement probabiliste et de la pratique antérieure, et enfin de tenir compte des marges plus ou moins apparentes introduites dans les divers modèles.

Pour illustrer les propos, considérons le cas d'un phénomène indésirable dont la condition de non occurrence fait intervenir deux grandeurs : un effet des actions E – la contrainte appliquée par une semelle de fondation superficielle sur le sol – et une résistance R – la contrainte à la rupture du sol. Si ces deux grandeurs étaient parfaitement connues (i.e., déterministes), alors il suffirait de s'assurer que $E < R$. Dans la réalité, comme elles sont aléatoires, la ruine de l'ouvrage doit être caractérisée par une probabilité de défaillance p_f que l'on souhaite borner :

$$p_f = P(R \leqslant E) < p_{lim}. \tag{1.1}$$



Si E et R sont des grandeurs indépendantes et caractérisées par leur densité continue de probabilité $f_E(e)$ et $f_R(r)$, alors la probabilité de défaillance s'écrit :

$$p_f = p(g(e,r) \leqslant 0) = \int_{D_R} f_E(e) f_R(r) \mathrm{d}e \, \mathrm{d}r = 1 - p(g(e,r) > 0). \quad (1.2)$$

où D_R est la zone de ruine et $g(e, r)$ la fonction qui caractérise la marge de sécurité (par exemple $g(e,r) = r - e$).

Cette approche statistique est difficile à mettre en œuvre sur le terrain. Dans la pratique, la plupart du temps, elle est remplacée par une approche semi-probabiliste. Cette approche consiste à vérifier un critère approché et conservatif en faisant intervenir d'une part des valeurs appropriées de E et R appelées des grandeurs caractéristiques et notées E_k et R_k et d'autre part des coefficients partiels γ_F et γ_M affectant les valeurs des actions et les résistances. L'inégalité de l'équation 1.1 s'exprime alors sous la forme :

$$\gamma_F E_k \leqslant \frac{R_k}{\gamma_M}. \quad (1.3)$$

La première étape de la justification de l'ouvrage consiste à vérifier qu'au moment de la construction et en service, les dégradations restent dans un seuil de tolérance acceptable pour des actions courantes correspondant aux conditions d'exploitation. Ce seuil peut évoluer au cours du temps puisqu'un ouvrage a une durée de vie limitée. Ainsi, par exemple, s'il est en général impossible d'éviter le tassement différentiel d'un ouvrage, il faut s'assurer que les déformations restent limitées dans le temps pour que la probable fissuration reste acceptable pour un usage quotidien. Cet état limite est appelé *état limite de service* (ELS).

Dans la seconde étape de la justification de l'ouvrage, il s'agit de s'assurer qu'aucune ruine de l'ouvrage n'apparaisse, qui mettrait en danger les usagers, dans des situations exceptionnelles où des sollicitations plus sévères se manifesteraient (choc d'un pilier de pont par une péniche, séisme, feu dans un tunnel). On tolère alors une dégradation plus forte de l'ouvrage que sous les conditions de chargement décrite dans l'ELS. Cet état est appelé *état limite ultime* (ELU).

L'Eurocode 0 définit de manière rigoureuse ces états et impose que les vérifications vis-à-vis des états limites de service et ultimes soient faites. Les dimensionnements des éléments en béton armé ou en construction métallique s'inscrivent depuis longtemps dans cette démarche. Avec l'arrivée de l'Eurocode 7, la vérification des ouvrages géotechniques s'est inscrite dans cette démarche.

Le calcul des charges nécessaire pour l'étude des différents états limites s'effectue de façon usuelle en pondérant les valeurs nominales de charges par des coefficients partiels γ_F et γ_M. À titre d'exemple, le tableau 1.1 extrait de l'Eurocode 7 donne quelques valeurs indicatives de ces coefficients à considérer en ELU pour différentes situations (A, B ou C) en fonction du type d'actions (permanentes ou variables) et des propriétés du sol qu'il convient d'adopter pour les études classiques. Des valeurs plus grandes doivent être prises en compte dans le cas de risque anormalement grand ou des conditions de terrain ou de charges inhabituelles ou exceptionnellement difficiles (ex. : coefficients partiels égaux à un pour les situations accidentelles). Des valeurs moins sévères peuvent être utilisées pour justifier les ouvrages temporaires et les situations transitoires. Par ailleurs, les coefficients de pondération valent 1 pour les états limites de service.

Tableau 1.1 Coefficients partiels, ELU dans des situations durables et transitoires.

Cas	Actions			Propriétés du sol			
	Permanentes		Variables	tan	c'	C_u	σ_u
	défavorables	favorables	défavorables				
Cas A	1,00	0,95	1,50	1,10	1,30	1,20	1,20
Cas B	1,35	1,00	1,50	1,00	1,00	1,00	1,00
Cas C	1,00	1,00	1,30	1,25	1,60	1,40	1,40

tan : tangente de l'angle de frottement interne, c' : cohésion effective, C_u : cohésion non drainée, σ_u : résistance à la compression du sol ou de la roche.

Les actions qui s'appliquent sur le sol sont référencées dans l'Eurocode 1 « Bases du calcul et actions sur les structures ». Elles sont nombreuses et variées. Pour mémoire, voici quelques exemples d'actions à prendre en compte dans le calcul de dimensionnement des ouvrages géotechniques :



- le poids des sols ;
- les contraintes existant dans le terrain ;
- les pressions de l'eau libre ou souterraine, les forces d'écoulement de l'eau ;
- les charges permanentes, d'exploitation et d'environnement ;
- les surcharges, les forces d'amarrage, les suppressions de charges ou les excavations dans le terrain ;
- les mouvements dus au fluage, au glissement de masses de sol, à la dégradation, à la décomposition, à l'auto-compaction, au séisme ;
- les effets de la température…

Pour chaque situation analysée, aucun des États Limites correspondants ne doit être atteint. Cette exigence peut être satisfaite par l'utilisation de calculs, l'adoption de mesures prescriptives, la réalisation de modèles expérimentaux et d'essais de chargement, une méthode observationnelle. Ces quatre approches peuvent être combinées.

1.2 Classement d'un ouvrage géotechnique

Pour des raisons évidentes de coût, la complexité de l'étude géotechnique dépend du type d'ouvrage construit et des risques encourus pour les biens et les vies. Les exigences minimales ne sont pas les mêmes selon que l'on construit une maison individuelle, un immeuble de taille moyenne, la tour Montparnasse ou le tunnel sous la Manche. Dans l'Eurocode 7 « Calcul géotechnique » une classification des ouvrages dans trois catégories est proposée.

1.2.1 Catégorie géotechnique 1

Cette catégorie comprend les petits ouvrages relativement simples pour lesquels les exigences fondamentales sont satisfaites avec des risques négligeables pour les biens et les vies, en s'appuyant sur l'expérience acquise et des reconnaissances géotechniques qualitatives. Les procé-

dures simplifiées de dimensionnement mises en œuvre ne s'appliquent que pour des conditions de terrain dont une expérience comparable a montré qu'elles sont suffisamment simples pour que des méthodes de routine puissent être utilisées pour le calcul et l'exécution des fondations.

Les types d'ouvrages entrant dans cette catégorie sont les suivants :

- les maisons à un ou deux niveaux et les b,timents agricoles simples, dont P_{max} (poteaux) = 250 kN et p_{max} (murs) = 100 kN/m, construits sur des types de fondations superficielles et sur pieux ;
- les murs de soutènement et fouilles blindées ;
- les petites excavations pour les travaux de drainage, la pose de canalisation.

1.2.2 Catégorie géotechnique 2

Elle comprend les types d'ouvrages et de fondations ne présentant ni de risques anormaux ni des conditions de terrain et de chargement inhabituelles ou exceptionnellement difficiles. La justification de ces ouvrages nécessite de recueillir des données et de réaliser des calculs géotechniques quantitatifs permettant de s'assurer que les exigences fondamentales sont satisfaites. Mais des procédures de routine peuvent être utilisées pour les essais en place et en laboratoire ainsi que pour le calcul et l'exécution des travaux.

Les types d'ouvrage entrant dans cette catégorie sont :

- les fondations superficielles, sur radiers ou sur pieux ;
- les murs et autres ouvrages retenant ou soutenant le sol ou l'eau ;
- les excavations ;
- les appuis et culées de ponts ;
- les remblais et terrassements ;
- les ancrages et autres systèmes de tirants ;
- les tunnels dans les roches dures non fracturées, sans conditions spéciales d'étanchéité ou autres exigences.

1.2.3 Catégorie géotechnique 3

Cette catégorie comprend tous les autres ouvrages ou parties d'ouvrages n'entrant pas dans les catégories précédentes.

1.3 Données géotechniques

Pour réaliser le dimensionnement de l'ouvrage, le géotechnicien doit disposer de suffisamment d'informations sur le terrain où l'ouvrage est construit, de manière à proposer la solution technologique la plus adéquate. Il est donc nécessaire de recueillir des informations sur :

- la convenance générale du terrain ;
- la disposition et la classification des différentes zones de sol ou de roche et des éléments de l'ouvrage ;
- les plans de stratification inclinés, les failles, joints et fissures, les cavités de dissolution ;
- les variations des niveaux des eaux souterraines ;
- les exploitations minières, cavernes ou autres ouvrages souterrains ;
- les effets d'affouillement, d'érosion et d'excavation ;
- les effets de la corrosion chimique, d'altération, du gel ;
- les autres effets du temps sur la résistance et les autres propriétés des matériaux ;
- les effets du nouvel ouvrage sur les ouvrages et les réseaux existants.

La reconnaissance géotechnique ne soulève pas de problème particulier pour les petits ouvrages de catégorie 1. Pour les ouvrages de catégorie 2 et 3, elle comprend trois étapes décrites ci-dessous.

1.3.1 Une reconnaissance primaire

Cette reconnaissance a pour but d'évaluer la convenance générale du site, de le comparer avec d'autres sites potentiels et d'estimer les transforma-

tions qui peuvent être provoquées par les travaux. Elle permet également de planifier les reconnaissances destinées aux dimensionnements et aux contrôles et d'identifier les zones d'emprunt.

Il est nécessaire de prendre en compte différents éléments en fonction de l'importance de l'ouvrage, la reconnaissance du terrain, la topographie, l'hydrologie, l'examen des ouvrages proches et des excavations voisines, les cartes et relevés géologiques et géotechniques, les reconnaissances antérieures, les photographies aériennes, la sismicité régionale…

1.3.2 Une reconnaissance pour le dimensionnement

Cette reconnaissance est menée pour collecter les informations nécessaires au dimensionnement de l'ouvrage dans les conditions économiques satisfaisantes et à la définition de la méthode de construction. Les éléments suivants doivent être pris en compte : la stratigraphie géologique, les propriétés de déformabilité et de résistance des terrains, la distribution des pressions interstitielles de l'eau, les conditions de perméabilité, les instabilités, la compactibilité, l'agressivité du terrain et de l'eau, la sensibilité au gel.

Le dimensionnement de l'ouvrage suppose donc qu'on ait une connaissance qui soit la plus précise possible des caractéristiques du sol ou de la roche. Un certain nombre d'entre eux est recensé dans le tableau 1.2.

1.3.3 Une reconnaissance de contrôle

Cette reconnaissance est effectuée au cours de la réalisation de l'ouvrage. Elle a pour but de vérifier que les données géotechniques recueillies dans l'étape précédente et ayant servi au dimensionnement sont toujours valables.

Tableau 1.2 Paramètres caractérisant les sols et roches.

Sols	Roches
courbe granulométrique	minéralogie
forme des particules	pétrographie
rugosité de surface	teneur en eau
indice de densité	poids volumique
poids volumique	porosité
teneur naturelle en eau	vitesse du son
limites d'Atterberg	coefficient d'imbibition rapide
teneur en carbonates	gonflement
teneur en matières organiques	index de durabilité
résistance au cisaillement	résistance à la compression simple
raideur du sol	caractérisation des discontinuités
perméabilité	perméabilité
consolidation	
compactibilité	

1.4 Documents contractuels

La justification du dimensionnement d'un ouvrage géotechnique fait l'objet de deux documents contractuels dont la structure est définie par les normes en vigueur : un *rapport de reconnaissance géotechnique* et un *rapport de dimensionnement de l'ouvrage*.

Les résultats de la reconnaissance des terrains sont consignés dans un rapport qui sert de base au rapport de dimensionnement géotechnique. Le rapport comprend normalement deux parties :

- la présentation des informations géotechniques disponibles, y compris les caractéristiques géotechniques et les données importantes pour le projet ;
- l'évaluation géotechnique de ces informations indiquant les hypothèses adoptées pour établir les valeurs des paramètres géotechniques.

Le rapport de dimensionnement rassemble les hypothèses de calcul, les données, les calculs et les résultats. Il convient d'y inclure les points suivants :

- une description du site et de son voisinage ;
- une description des conditions de terrain ;
- les valeurs de calculs des propriétés des sols et des roches, y compris leurs justifications ;
- la liste des codes et normes appliqués ;
- l'énoncé du niveau des risques admis ;
- les calculs géotechniques et les dessins ;
- une liste des points à vérifier pendant l'exécution des travaux ou nécessitant de l'entretien ou un suivi ;
- un programme de contrôle et de surveillance, lorsque le contexte l'exige.

Selon le type de projet, ce rapport peut être plus ou moins détaillé ; la rédaction d'une page peut suffire pour les projets simples.

1.5 Méthodologie d'une étude de sols

Le choix de la méthode dépend dans une large mesure de la nature du problème étudié et de la structure géologique du site comme cela est indiqué sur les figures 1.1 et 1.2.

Certains essais sont mieux adaptés que d'autres à l'étude d'un problème, compte-tenu évidemment de la nature du terrain. Souvent, sur un même chantier, plusieurs types d'essais complémentaires sont utilisés comme le pénétromètre statique et le pressiomètre. Le tableau 1.3 apporte des précisions sur ces points.

Tableau 1.3 Aide au choix d'un type d'essai (MP : Méthode Proscrite ; MR : Méthode Recommandée ; MUC : Méthode Usuelle et Convenable).

	Carot.	Lab.	Pres.	Pénétro.	SPT	Scisso.
Argiles molles	MUC	MUC	MR	MR	MP	MUC
Argiles raides	MR	MUC	MR	MP	MP	MP
Sables	MP	MT	MR	MR	MUC	MP
Graviers	MP	MP	MR	MT	MP	MP



Étude de fondation
Soutènement
Adaptation au site
Problèmes d'exécution
Problèmes à résoudre
Argiles raides marnes, roches
Argiles molles
Sables
Sables et graviers
Nature des sols
Type d'essai géotechnique

Figure 1.1 Méthodologie générale d'une étude.

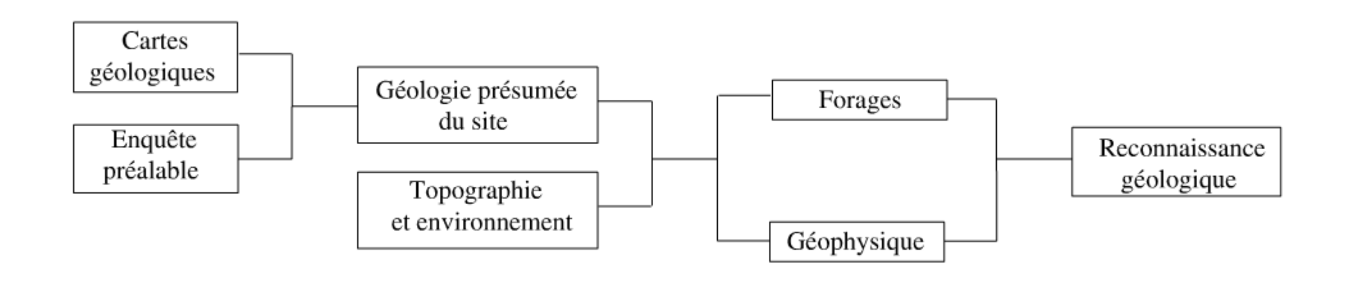


Figure 1.2 Méthodologie de la reconnaissance géologique.

2 Techniques de reconnaissance des terrains

Avant de sélectionner les techniques les plus appropriées pour caractériser le terrain, le géotechnicien débute toujours l'étude par la recherche et l'exploitation de données déjà disponibles dans le domaine public (cartes géologiques, photographies aériennes, documents divers sur le site) et en faisant des enquêtes auprès des organismes publics et/ou des sociétés privées.

Complétée par des observations faites sur le terrain (relevés topographiques, étude des sols en surface), cette étape permet de définir les essais in situ et les sondages nécessaires à la reconnaissance des terrains, à savoir la structure géologique du sous-sol, et d'autres essais plus spécifiques permettant de déterminer certaines propriétés des sols (résistance mécanique, déformabilité, perméabilité…).

Ces essais ne suffisent pas à eux seuls pour collecter l'ensemble des informations utiles pour le dimensionnement des ouvrages. Ils sont donc complétés par une caractérisation de certaines propriétés en laboratoire.

Une courte présentation de ces techniques d'essais in situ usuelles est proposée dans ce chapitre.

2.1 Essais géophysiques

Les essais géophysiques sont utilisés pour la reconnaissance des structures géologiques de grandes superficies. Ils sont également utilisés pour obtenir à moindre coût l'état du sous-sol en profondeur dans le terrain sur lequel l'ouvrage est bâti. Ils fournissent des renseignements complé-

tant ceux recueillis par les sondages ponctuels. L'exploitation des résultats permet de construire des cartes représentatives du sous-sol (cartes géologiques, cartes des formations superficielles, coupes…).

Les essais géophysiques sont utilisés dans l'étude préliminaire d'un projet important pour préciser les emplacements où les ouvrages peuvent être implantés et les zones à éviter. Ils permettent également d'orienter l'implantation des sondages en vue d'une reconnaissance localisée et plus précise du sol.

On décrit ci-dessous succinctement les principales méthodes géophysiques.

2.1.1 Méthode électrique

Cette méthode est basée sur la mesure de la résistivité électrique ρ du sol. On envoie dans le sol un courant continu à l'aide de deux piquets A et B et on mesure la différence de potentiel entre deux autres points du terrain C et D situés entre les points A et B (Fig. 2.1). Si le terrain est homogène et isotrope alors la résistivité électrique est donnée par la relation :

$$\rho = \frac{2\pi(V_C - V_D)}{I(AB^{-1} + BD^{-1} - AD^{-1} - BC^{-1})}, \qquad (2.1)$$

où I est l'intensité du courant.

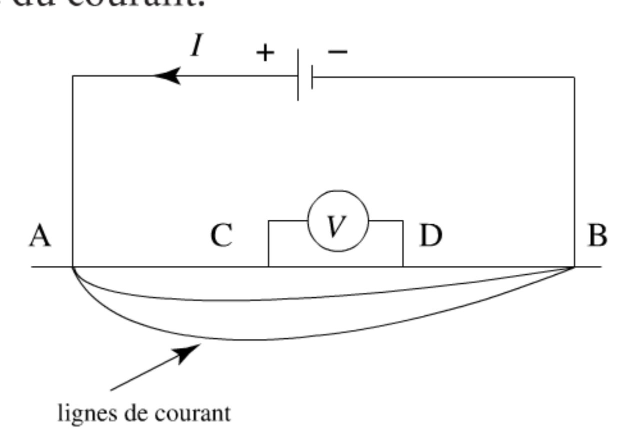


Figure 2.1 Méthode électrique.

À titre indicatif, quelques valeurs de résistivité électrique de sols sont regroupées dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1 Ordre de grandeur de la résistivité électrique du sol.

Terrain	ρ (Ω.cm)
Pétrole brut	environ 10^{14}
Roches endogènes	environ 10^4
Roches sédimentaires	environ 10^3 à 10^4
Cuivre, argent	environ 10^{-6}

Si le terrain n'est pas homogène, ce qui est par exemple le cas en présence de deux couches de résistivité électrique ρ_1 et ρ_2, alors selon la position des piquets, la couche la plus profonde (couche 2) est traversée par un courant ou non.

Si la longueur AB est petite par rapport à l'épaisseur h de la couche 1, la plupart des lignes de courant passent à travers la couche 1. L'application de la relation précédente fournit une valeur approchée de ρ_1, indépendante de la distance AB.

En revanche, si la distance AB est très grande par rapport à cette épaisseur, on mesurera une résistivité électrique qui est plus proche de celle de la couche 2 (ρ_2). Il existe donc une corrélation entre la résistivité enregistrée en fonction de l'écartement AB et l'épaisseur de la couche, qui peut être déterminée moyennant une analyse plus sophistiquée.

L'analyse est généralisable à n couches, mais elle nécessite l'utilisation d'outils basés sur l'analyse inverse pour identifier la nature des couches et leurs profondeurs.

L'application d'un courant n'est pas indispensable pour déterminer la résistivité électrique du terrain car souvent on constate entre deux points du sol une différence de potentiel (polarisation spontanée) que l'on peut mesurer. On applique cette méthode notamment dans les forages, entre deux points situés à des profondeurs différentes.

2.1.2 Méthode sismique

Dans la prospection sismique par réfraction qui est la technique utilisée en génie civil, on produit en un point O un ébranlement par des chocs



mécaniques (marteaux) ou une explosion qui génèrent des vibrations dont on étudie la propagation en plaçant un détecteur (ou géophone) en un point A situé à une distance x de O. Deux types d'ondes sont détectées : les ondes directes et les ondes réfléchies sur les frontières qui séparent les couches de sol de nature différente. Celles-ci obéissent aux lois de l'optique classique comme l'illustre l'exemple de la figure 2.2.

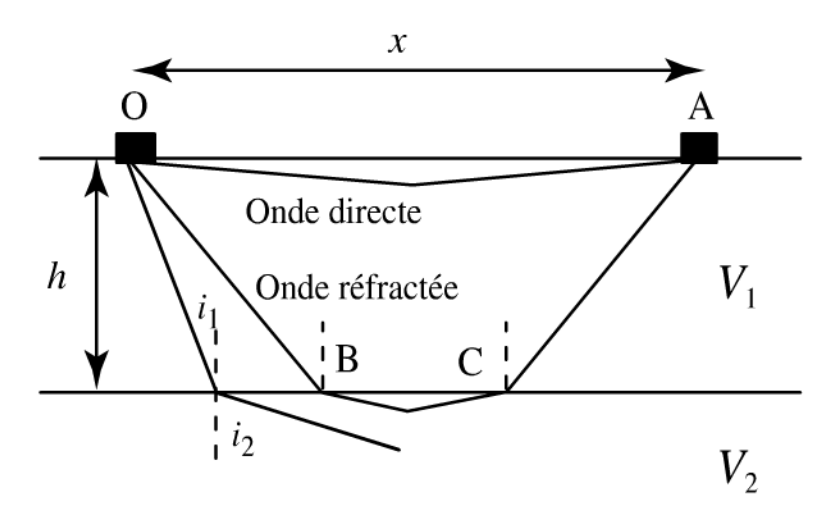


Figure 2.2 Méthode sismique.

Soit un sol constitué de deux couches, celle la plus proche de la surface ayant une épaisseur h. Supposons que la vitesse de propagation de la couche superficielle V_1 est inférieure à la vitesse de propagation V_2 de la couche profonde. Le temps de propagation de l'onde directe de O vers A vaut :

$$t_1 = \frac{OA}{V_1}. \tag{2.2}$$

L'onde réfractée qui parcourt le chemin O→ B→ C → A suit la loi de réfraction :

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{V_1}{V_2}, \tag{2.3}$$

où i_1 est l'angle d'incidence et i_2 l'angle de réfraction. Si $i_2 = \frac{\pi}{2}$, il en résulte que :

$$t_2 = \frac{2h}{V_1 \cos \delta} + \frac{x - 2h \tan \delta}{V_1}. \tag{2.4}$$

Lorsque la distance x est faible, l'onde directe est enregistrée en premier en A. Lorsque la distance croît suffisamment, comme $V_1 < V_2$, c'est l'onde réfléchie qui arrive en premier en A. Lorsque l'on trace l'évolution du temps de propagation de la première onde perçue en A en fonction de x (courbe dromochronique), on obtient sensiblement deux droites de pentes différentes qui se coupent en un point F. Ce point ainsi que les pentes de ces droites permettent de déterminer la profondeur h et les deux vitesses de propagation. Ce résultat s'étend au cas de plusieurs couches moyennant une analyse plus sophistiquée.

On donne dans le tableau 2.2 la plage de vitesses pour quelques sols.

Tableau 2.2 Ordre de grandeur des vitesses de propagation des ondes dites P (de compression ou longitudinales).

Type de sol	*V* (m/s)
Sols de faible compacité (terre végétale, tourbe, gravier)	< 500
Sols compacts (argiles, sables fins)	500 < *V* < 1 500
Sols compacts (calcaire, granit, basalte)	jusqu'à 7 000

La vitesse des ondes longitudinales (V_P) permet d'avoir une bonne indication des caractéristiques élastiques isotropes du sol puisque :

$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \qquad (2.5)$$

où λ et μ sont les modules d'élasticité de Lamé et ρ la masse volumique.

2.1.3 Autres méthodes géophysiques

Il existe d'autres méthodes pour caractériser le terrain qui sont destinées aux géologues pour établir les cartes géologiques et utilisées pour les grands ouvrages.

La méthode gravimétrique est fondée sur des mesures précises de la force de pesanteur, ou de ses variations, à l'aide de gravimètres. Elle sert à la prospection de roches lourdes ou au contraire plus légères que la

moyenne. Elle peut être utilisée pour détecter des cavités dans le sous-sol. La micro-gravimétrie est la méthode utilisée dans le domaine du génie civil.

La méthode magnétique qui permet de détecter les anomalies magnétiques dans le sol qui peuvent être dues à des minéraux magnétiques. Les cartes magnétiques que l'on peut établir à partir de la mesure de l'intensité magnétique donnent des renseignements sur la structure d'une région et servent à la recherche de richesses minérales. La méthode magnétique est utilisée en prospection de gisements de pétrole et de gaz naturel. Cette méthode est peu utilisée en génie civil.

2.2 Essais mécaniques in situ

2.2.1 Introduction

Lorsqu'on détermine les caractéristiques du sol par des essais de laboratoire, les propriétés du sols peuvent être mal identifiées du fait qu'elles sont mesurées sur des échantillons remaniés lors du prélèvement. C'est notamment le cas des sols ayant une cohésion insuffisante (e.g., sols fins). L'état micro-structurel du sol peut être modifié du fait que l'environnement de l'échantillon est différent de celui existant à l'état naturel (contraintes, humidité, température…) et lors du transport.

De plus, la variabilité du terrain et l'hétérogénéité du sol implique la réalisation d'un grand nombre d'essais en laboratoire pour que les valeurs des propriétés soient représentatives des propriétés in situ du terrain.

Les essais in situ pallient certains de ces inconvénients. En revanche, ils ne donnent accès qu'à des informations sur le comportement global du terrain. Dans de nombreux cas courants, ces informations sont suffisantes pour déterminer les principales caractéristiques (cohésion, angle de frottement interne, perméabilité globale du sol, résistance en pointe) utiles au géotechnicien. De plus, comme le volume mobilisé lors de l'essai est grand, les résultats sont moins dispersés que ceux obtenus en laboratoire.

Enfin, signalons un dernier intérêt de certains essais in situ : le terrain subit une sollicitation assez proche de celle à laquelle il sera soumis ultérieurement lorsque l'ouvrage sera construit. C'est notamment le cas de pénétromètre statique dont la sollicitation est voisine de celle exercée sur une fondation profonde. Ceci constitue un atout appréciable qui compense le fait que l'interprétation de l'essai est plus empirique que celui d'un essai de laboratoire.

À la fin de la première partie de cet ouvrage, nous avons donné quelques indications sur le choix de la méthode à adopter pour réaliser une étude de sols. Nous avons notamment indiqué les types d'essai recommandés en fonction du type de problème étudié et de la nature du terrain. Le choix étant fait, il convient de préciser les quantités à réaliser en précisant le programme d'étude qui devra comprendre, le nombre de points d'investigations (forages, pénétrations, géophysique), la profondeur des forages et la densité des études géotechniques. L'établissement du programme est tributaire de plusieurs facteurs, à savoir la nature du problème et l'importance de l'ouvrage à construire, le degré de connaissance préalable du site et l'environnement et la topographie.

2.2.2 Sondages

Les différentes techniques de sondage ne sont pas détaillés dans ce document. Les sondages permettent d'identifier la nature des sols en certains points du terrain et à différentes profondeurs et ainsi d'établir des cartes de profil du sous-sol. Les carottes prélevées peuvent également servir pour la fabrication d'éprouvettes qui seront ensuite testées au laboratoire. Il faut cependant garder en mémoire que les éprouvettes prélevées par sondage sont plus ou moins remaniées. Il convient d'être prudent quant à l'interprétation des résultats d'essais mécaniques ou de perméabilité hydraulique.

Pour les essais de laboratoire, on effectue au minimum un prélèvement par couche distincte et dans les couches épaisses, au moins trois prélèvements par couche. Les carottes sont examinées par le sondeur au fur et à mesure de leur extraction. Il leur attribue un nom conforme à l'usage local et établit une coupe de sondage. Le nom du sol est accompagné

d'épithètes caractérisant son degré de consistance, sa couleur et autres propriétés apparentes. Les échantillons sont ensuite expédiés et conservés dans des boîtes adéquates souvent étanches pour être examinés en détail en laboratoire.

Les points de sondage doivent être suffisamment nombreux pour pouvoir définir sans ambiguïté les particularités géologiques du site. Cependant comme les sondages sont des essais coûteux, ils sont réalisés aux endroits où l'information sur la géologie du terrain est vraiment indispensable. La profondeur des forages dépend de la nature et de la dimension présumées des fondations et de la profondeur de la couche dure, étant entendu que le forage ne peut être arrêté sur une couche molle. Dans le cas des semelles, la profondeur doit être telle que la contrainte résiduelle due à la surcharge est faible. En règle générale, on descend les sondages à une profondeur au moins égale à cinq fois la largeur présumée des semelles. Pour le dimensionnement des pieux, il ne faut pas s'arrêter brutalement au niveau de la couche dure. En effet, s'il existe une autre couche faible, les groupes de pieux se comporteront vis-vis de la couche profonde comme des semelles et provoqueront des désordres qui ne se produiraient pas sous un pieu isolé.

2.2.3 Essai au scissomètre

Le scissomètre est un appareil qui permet de mesurer essentiellement la cohésion non drainée C_u des sols peu consistants (argiles molles, vases, tourbes…), typiquement pour des valeurs $C_u \leqslant 100$ kPa.

L'essai consiste à enfoncer dans le sol à la profondeur désirée un dispositif muni d'une tige terminée à sa partie inférieure par un moulinet en forme de croix (Fig. 2.3). L'enfoncement du dispositif est réalisé par vérinage ou par battage selon la rigidité du sol. Il peut également être réalisé à partir du fond d'un trou de sondage. Ensuite, le tubage de protection est soigneusement bloqué et un couple de torsion est exercé sur la tige de transmission avec une vitesse de chargement de l'ordre de 1/10 à 3/10 de degré par seconde pour cisailler le sol suivant une surface de rupture cylindrique. On mesure en tête le couple nécessaire pour cisailler le cylindre d'argile entraîné par les pales (Fig. 2.4). Deux scissomètres sont

utilisés en France, le scissomètre SIMEC mis au point par Simecsol et le scissomètre LCPC mis au point par modifications successives du scissomètre SIMEC.



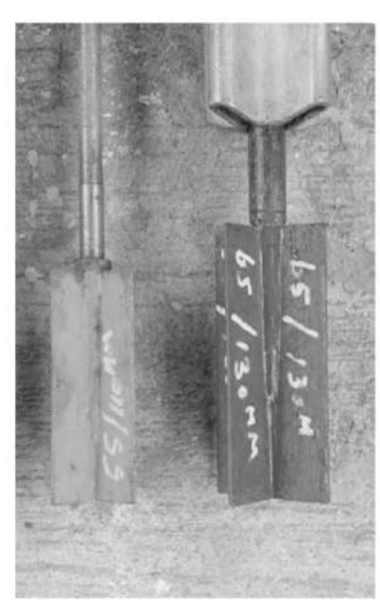


Figure 2.3 Scissomètre du LCPC (documents LCPC et [34]).

Le scissomètre LCPC est équipé de trois moulinets différents que l'on utilise selon la consistance des sols. Les pales ont un profil trapézoïdal, de largeur 60, 70 et 100 mm pour des hauteurs respectives de 125 mm, 140 mm et 215 mm. Ce dispositif permet de mesurer des cohésions comprises entre 5 kPa et 100 kPa.

Pour déterminer la cohésion en fonction du couple maxi exercé M_{max}, on fait l'hypothèse que toute la zone cisaillée par le moulinet est entrée en plasticité et que le matériau est un matériau de type Tresca de cohésion drainée C_u. En tout point de la zone de rupture, la contrainte de cisaillement est alors égale à la cohésion.

Pour les pales en forme de rectangle rectangulaire de largeur R et de hauteur H, la cohésion est donnée par :

$$C_u = \frac{M_{max}}{2\pi R^2(h + \frac{2R}{3})}. \tag{2.6}$$



Pour les pales en forme de trapèze isocèle de hauteur R et dont les cotés sont respectivement h et $h + 2R \tan \alpha$, où α est l'angle d'inclinaison d'un côté du trapèze, la cohésion vaut :

$$C_u = \frac{M_{max}}{2\pi R^2 (h + \frac{2R}{3 \sin \alpha})}. \qquad (2.7)$$

Cet essai permet également d'identifier la cohésion dans les directions verticale et horizontale, C_u^v et C_u^h, moyennant certaines modifications. Le moulinet unique est remplacé par un moulinet central et deux moulinets de garde fixes. Les moulinets de garde sont d'abord actionnés puis à partir d'une certaine rotation on actionne également le moulinet central. On obtient ainsi une indication sur l'anisotropie du sol. Le rapport C_u^v/C_u^h est de l'ordre de 1,1 pour les argiles surconsolidées et de 1,5 à 2 pour les argiles normalement consolidées. Ce rapport est proche de l'inverse du coefficient de poussée des terres au repos.

De plus, si après avoir atteint la rupture du sol, on continue à tourner le moulinet, le moment devient constant et la cohésion correspondante est égale à la cohésion du sol remanié C_{ur}. Ceci permet de caractériser la sensibilité du sol $S_t = C_{ur}/C_u$, c'est à dire d'évaluer son aptitude à être remanié au cours d'un prélèvement.

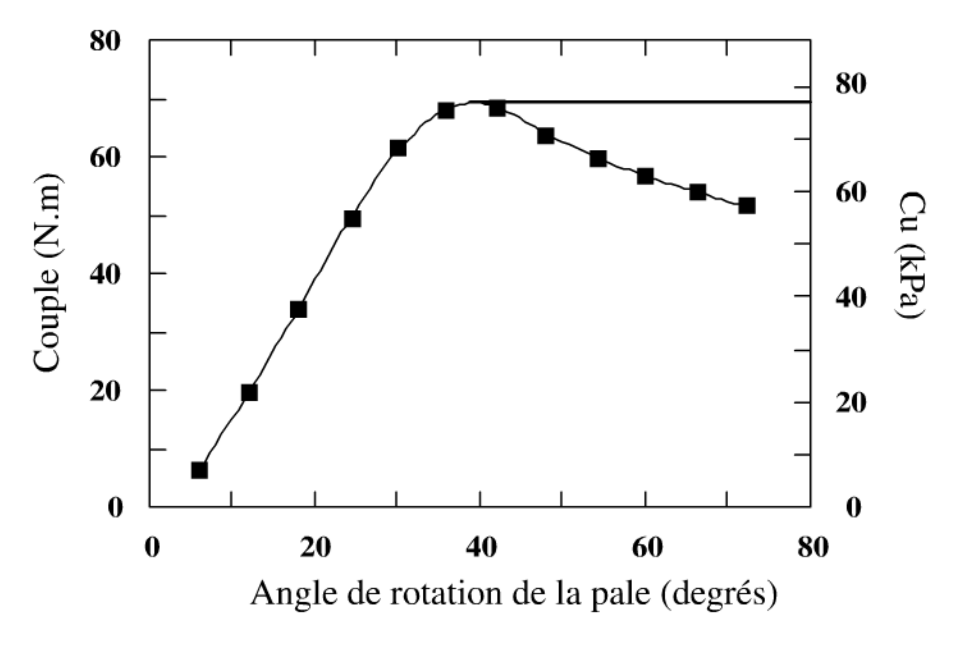


Figure 2.4 Résultat d'un essai de scissomètre LCPC (pale D = 60 mm) effectué à 550 m de profondeur.

2.2.4 Essais pénétrométriques

Le pénétromètre est un dispositif qui génère dans le terrain des sollicitations voisines de celles qui sont exercées par les fondations profondes lors de leur mise en place et leur utilisation. C'est en quelque sorte un pieu à l'échelle réduite.

Cet essai permet de caractériser la résistance du sol rencontrée en fonction de la profondeur. Il est relativement facile à exécuter et donne des informations qualitatives, qui sont suffisantes dans de nombreux cas pour dimensionner l'ouvrage géotechnique. Il doit être jumelé à des sondages, même très espacés pour reconnaître le sol.

Il existe deux types de pénétromètres, qui se distinguent par le mode d'enfoncement employé :

- *le pénétromètre statique* enfoncé à vitesse constante (en général 3 mm/s) par application d'une pression verticale continue à l'aide d'un vérin ;
- *le pénétromètre dynamique* enfoncé par battage sous l'action de coups de mouton successifs appliqués sur le train de tiges.

Pénétromètres statiques

Les essais pénétrométriques statiques sont des essais répandus en France (Fig. 2.5 et 2.6). Le principe de l'essai consiste à enfoncer dans le sol un

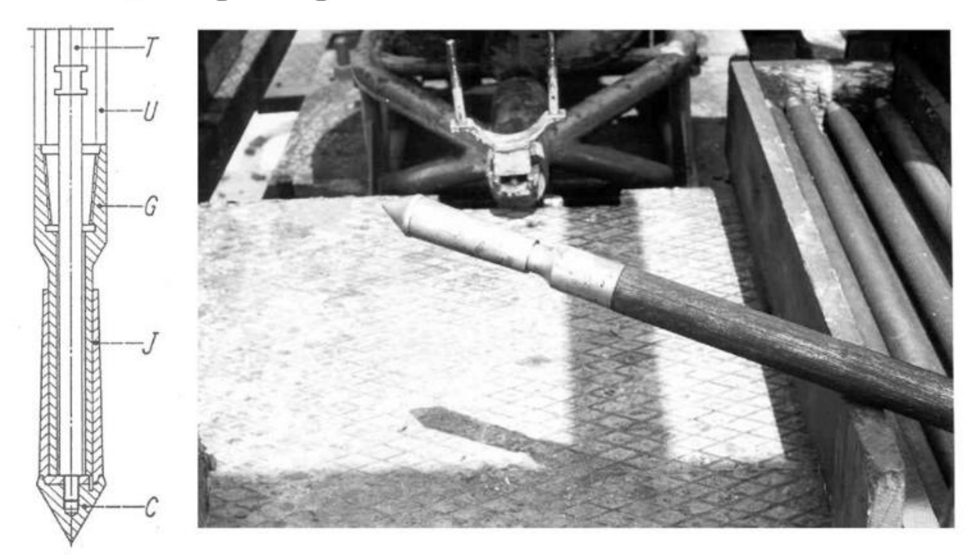


Figure 2.5 Pénétromètre de Gouda (extrait de Reiffsteck [34]).



tube muni d'une pointe et à mesurer la réaction qu'oppose le sol à l'enfoncement du cône qui se trouve à l'extrémité de la pointe ainsi que les forces de frottement latéral du terrain sur le train de tiges. Pour séparer les deux termes, deux types d'appareillage ont été développés.

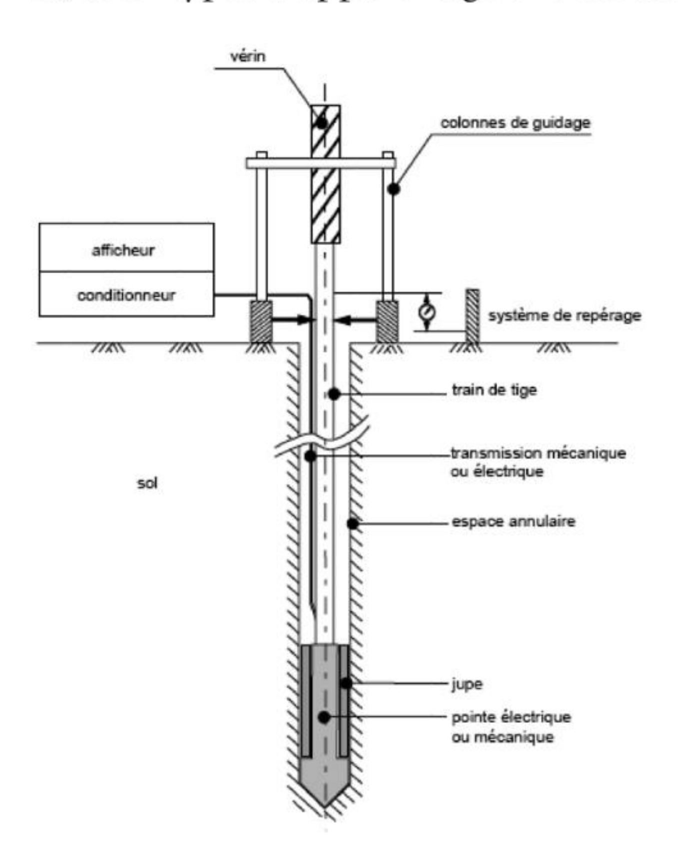


Figure 2.6 Principe du pénétromètre statique (extrait de Reiffsteck [34]).

☐ Pénétromètre à cône mobile

Dans ce dispositif, l'effort de pointe est obtenu par pénétration du cône seul au-dessous du fût. De nombreuses variantes ont été développées.

À titre d'exemple, on présente succinctement le pénétromètre hollandais. Il s'agit d'un dispositif qui offre une gamme de matériel qui va du simple pénétromètre à main, jusqu'au pénétromètre lourd permettant d'appliquer un effort total de 175 kN. Il comporte trois éléments fondamentaux : le dispositif de chargement ancré ou lesté et servant à transmettre les efforts, le matériel de pénétration (tiges, tubes, cône) et le dispositif de mesure.

Le pénétromètre de Gouda est le plus connu (voir figure 2.5).

À titre d'exemple, la figure 2.5 présente le dispositif de 25 kN. Le chargement est réalisé par un vérin à crémaillère à deux vitesses entraîné par une manivelle. Une tête hydraulique est fixée à la base de la crémaillère. La fixation sur le sol est assurée par l'intermédiaire de quatre vis d'ancrage. Le matériel de pénétration est constitué :

- d'un cône d'angle au sommet de 60 degrés et de diamètre à la base de 35,7 mm, protégé par une jupe tronconique de 9 cm de hauteur ;
- d'un train de tige de 15 mm de diamètre coulissant dans des tubes dont les manchons d'assemblage ont un diamètre de 35,7 mm, mais dont les fûts sont plus étroits (29 mm) pour limiter le frottement latéral.

La pression de pointe est mesurée par l'intermédiaire de manomètres, l'un pour les faibles pressions, l'autre pour les hautes pressions qui mesurent la pression d'huile dans le vérin.

Pénétromètre à cône fixe

Dans cet appareil, le cône et le fût n'ont aucun mouvement relatif. L'idée est de placer un capteur qui mesure directement l'effort du cône, sachant que, par ailleurs, l'effort total est mesuré. À titre d'exemple, on présente sur la figure 2.7 le pénétromètre du LCPC de Saint-Brieuc qui est une adaptation de celui des Hollandais. La pointe est munie d'un peson à jauges de déformation. Elle se présente sous l'aspect d'un cylindre de 207 mm de longueur terminé par un cône de 41,5 mm de hauteur. Le diamètre de l'ensemble est identique à celui des tubes de pénétromètre (36 mm). Les tubes extérieurs ne sont plus nécessaires. Lors de la pénétration, l'extensomètre est sollicité par une rotule, ce qui permet une mesure continue du terme de pointe.

Après avoir calé l'ensemble, on procède à l'enfoncement total du dispositif à vitesse lente et constante (2 cm/s). S'il s'agit d'un pénétromètre à cône fixe et à mesure continue, on effectue à intervalle régulier une lecture de l'effort total et de l'effort de pointe (par exemple tous les 20 cm). Dans le cas d'un pénétromètre à cône mobile, on procède par cycle de pénétration : l'ensemble tubes et cône est d'abord enfoncé sur une profondeur de 16 cm et la mesure l'effort total Q_l faite, puis le cône est enfoncé sur 4 cm pour mesurer la résistance de pointe.



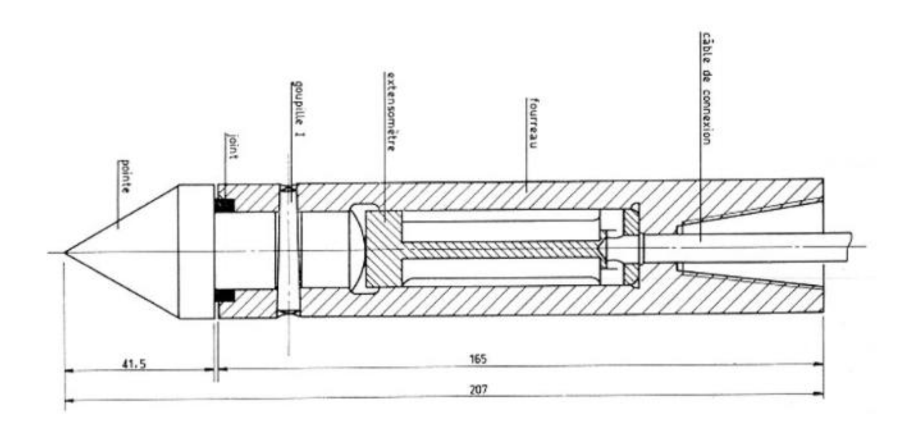


Figure 2.7 Pénétromètre LCPC.

10 20 30 40 50 60 70

Effort total (kN)

2
4
6
8
10
12
14
16

Limon sableux

Limon fin

Argiles et graviers

Graviers et galets

Graviers sabloneux limoneux

q_c (10^5 Pa)

20 40 60 80 100 120 140

Figure 2.8 Exemple de pénétrogramme (d'après Philipponnat et Hubert [31]).

Les résultats d'un essai de pénétration statique sont reportés sur un graphique où l'on exprime en fonction de la profondeur l'effort total, l'effort de pointe et éventuellement le frottement latéral. Leur interprétation reste cependant assez délicate. Il faut garder à l'esprit que divers facteurs influencent les résultats, en particulier la forme de la pointe, les discontinuités dans la pénétration (selon le type de procédé utilisé) et la vitesse de pénétration. Il faudra donc être très attentif au moment de l'interprétation et connaître le type de matériel utilisé pour conduire l'essai.

L'examen des pénétrogrammes est riche d'enseignement, car indépendamment de toute interprétation théorique, il permet d'embraser d'un seul coup d'œil toutes les particularités du sol (Fig. 2.8). Un géotechnicien expérimenté peut même sur la base des résultats fixer approximativement le type et le niveau de fondation.

Les forces de pointe Q_p et de frottement latéral Q_f permettent d'estimer la résistance de pointe q_c et la résistance latérale q_f par les expressions suivantes :

$$q_c = \frac{Q_p}{S_p}, \tag{2.8}$$

et

$$q_f = \frac{Q_f}{S_f}, \tag{2.9}$$

où S_p est la section maximale du cône et S_f la surface latérale du tube qui frotte lors de l'enfoncement.

La relation entre d'une part les résistances q_c et q_f et d'autre part les propriétés du sol est délicate à établir, la théorie de la force portante utilisée pour les pieux donnant des résultats non conformes aux observations expérimentales, en particulier pour les sols frottants. Pour les sols purement cohérents, il est possible d'avoir une indication sur la cohésion non drainée à partir de la connaissance de q_c et de la pression verticale effective des terres au niveau de la pointe q'_0 sachant que :

$$C_U = \frac{q_p - q'_0}{N_c}. \tag{2.10}$$

Pour une pointe conique, le coefficient N_c est compris entre 10 et 15, tandis que pour une pointe à jupe conique N_c est compris entre 15 et 20.

Les résultats les plus intéressants concernant la corrélation observée entre la résistance de pointe et le frottement latéral f_s ont été donnés par Sanglerat (Tab. 2.3).

Tableau 2.3 Effet de la nature du sol.

Sols	Rapport f_s/q_c
Tourbes, argiles molles	1/30 à 1/10
Argiles	1/25 à 2/25
Limons argiles sableuses	1/100 à 1/25
Sables	1/150 à 1/100
Sables grossiers et graviers	< 1/150

Dans le tableau 2.4, on donne également des ordres de grandeur de la résistance de pointe pour différents types de sols.

Tableau 2.4 Résistance de pointe en fonction de la nature du sol.

Sols	q_c (MPa)
Argiles	$q_c < 0{,}8$
Limons	$0{,}7 < q_c < 2$
Sables argileux	$0{,}3 < q_c < 6$
Graviers silteux	$2 < q_c$
Sables	$1{,}5 < q_c$

■ Pénétromètres dynamiques

Pour une étude d'avant-projet, l'essai pénétrométrique dynamique est souvent privilégié à l'essai pénétrométrique statique car son coût est moins élevé. Le principe de l'essai de pénétration dynamique consiste à faire pénétrer des tiges ou des tubes métalliques dans le sol par battage (Fig. 2.9). Pour une énergie de battage constante, on compte le nombre de coups de mouton correspondant à un enfoncement donné ou

l'enfoncement produit par un coup. Cet essai fournit une indication qualitative sur la résistance du sol.

Les appareils sont constitués d'un train de tubes lisses de diamètre compris entre 30 et 60 mm, muni à son extrémité d'un tube carottier ou d'une pointe. La masse frappante appelée mouton et la hauteur de chute varie selon le type d'appareil. On présente ci-dessous deux appareils couramment utilisés.

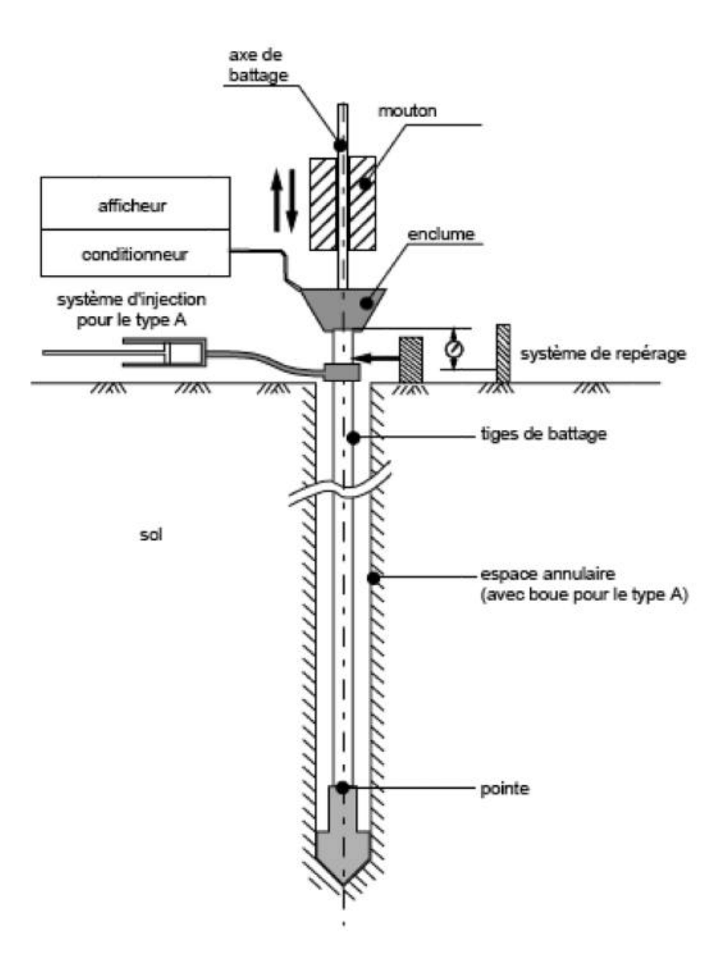


Figure 2.9 Principe du pénétromètre dynamique (extrait de Reiffsteck [34]).

☐ Standard Penetration Test (SPT)

L'essai consiste à battre un carottier de dimensions normalisées (tube de 51 mm de diamètre extérieur et de 813 mm de long) à l'aide d'un mouton de 635 N tombant en chute libre d'une hauteur de 76,2 cm sur le train de tiges de diamètre extérieur 35 mm sur lequel le carotier est fixé (Fig. 2.10).

Il s'exécute de la manière suivante. Après avoir nettoyé le fond du forage, le carottier est mis en place et est battu sur une profondeur de 15 cm pour éliminer la zone superficielle partiellement remaniée. Ensuite, le battage est poursuivi en comptant le nombre N_1 de coups de mouton pour enfoncer une première fois le carottier de 15 cm, puis le nombre N_2 de coups pour enfoncer une seconde fois le carottier de 15 cm. Le paramètre mesuré est le nombre de coups total $N = N_1 + N_2$. Cette façon de procéder permet une connaissance plus précise de la résistance du sol.

Lorsque le terrain devient trop résistant, on arrête l'essai pour un nombre de coups donné et on mesure l'enfoncement correspondant à ce nombre de coups. Certaines corrections sont parfois proposées pour tenir compte de la présence d'une nappe phréatique dans les sables saturés très fins ou limoneux et pour tenir compte de la surcharge dues aux poids des terres.

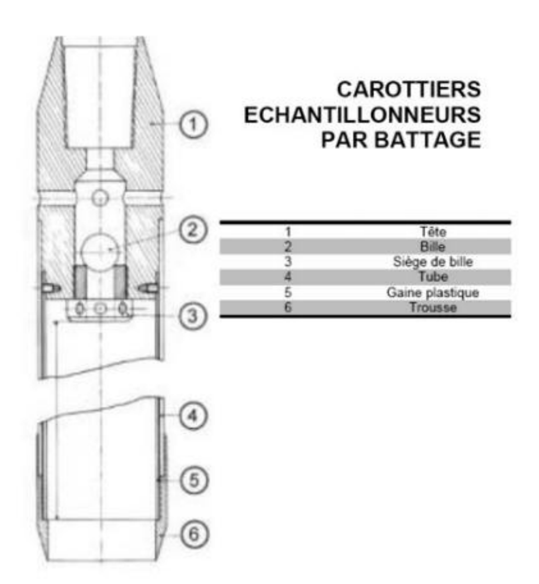


Figure 2.10 Carottier (http://www.apageo.com/pdf/).

Comme l'essai permet de prélever des échantillons remaniés, on pourra également identifier la nature des sols. Des corrélations ont été établies par différents auteurs entre le nombre de coups N et l'indice de densité ou entre N et l'angle de frottement interne φ (Tab. 2.5). Sanglerat déconseille l'utilisation du SPT dans les argiles en raison des surpressions interstitielles et des frottements latéraux parasites qui apparaissent lors du battage et qui sont délicates à quantifier.

Tableau 2.5 Corrélation entre le nombre de coups SPT et l'état du sable.

N	I_D	État du sable
44 à 10	< 0,2	Très lâche
10 à 30	0,2 à 0,4	Peu compact
30 à 50	0,6 à 0,8	Moyennement compact
> 50	> 0,8	Très compact

□ Pénétromètre dynamique Fondasol

Pour limiter les frottements latéraux parasites, le dispositif est constitué d'une pointe conique susceptible de coulisser dans un tubage de protection de même diamètre (Fig. 2.11) :

- le diamètre de la pointe est de 60 mm, son poids de 449 N ;
- un train de tiges intérieur de diamètre (32 mm/42 mm) solidaire de la pointe pesant 65 N ;
- un train de tiges de tube extérieur de diamètre (47 mm/60 mm) pesant 90 N ;
- une tête de battage du tube et une tête de battage de l'ensemble tige-pointe.

L'énergie de percussion (environ 300 J) du pénétromètre à moyenne puissance est fournie par un mouton-batteur automoteur de 100 kg.



Figure 2.11 Pénétromètre dynamique Fondasol.

Différents types de profils peuvent être définis avec les pénétromètres dynamiques. Par exemple, on peut noter le nombre de coups pour un enfoncement constant Δh, en général 10 cm. Pour les pénétromètres munis d'une pointe dont le diamètre est supérieur à celui des tiges, le refus par le quotient : $e = \Delta h/N$ peut également être caractérisé.

Pour le pénétromètre Fondasol, on procède de manière différente. L'ensemble du dispositif est battu en comptant le nombre de coups pour un enfoncement de 10 cm. Le terme de pointe est déterminé à différentes profondeurs (tous les 20 ou 50 cm) en réalisant une volée supplémentaire de n coups $(N = 10)$ sur la tige intérieure qui produit un enfoncement de la pointe seule de dh, en général faible. On caractérise alors le refus plastique $e = \mathrm{d}h/N$ que l'on introduit dans une formule de battage et qui permet de calculer la résistance dynamique en pointe q_d. La formule des Hollandais est l'une des plus utilisée pour caractériser la résistance dynamique. Elle est donnée par l'expression :

$$q_d = \frac{M}{e(M + M')}\frac{MgH}{A}, \tag{2.11}$$

où A est la section droite de la pointe, M la masse du mouton, H la hauteur de chute et M' la somme des masses du train de tiges de l'enclume et de la tige-guide masse frappée. L'interprétation de la résistance dynamique doit toutefois être faite avec beaucoup de prudence.

La courbe de battage obtenue en fonction de la profondeur renseigne sur la nature ou la compacité des couches rencontrées ainsi que sur la cote éventuelle du rocher. Elle donne également des indications utiles pour la prévision des conditions de battage des pieux ou des palplanches (Fig. 2.12).

2.2.5 Essai pressiométrique

Principe de l'essai

L'essai pressiométrique normal est un essai de chargement rapide du sol en place obtenu par expansion d'une cellule cylindrique mise sous pression. Louis Ménard a repris une idée originale de l'ingénieur allemand Koegler et a développé le dispositif jusqu'à son stade actuel.

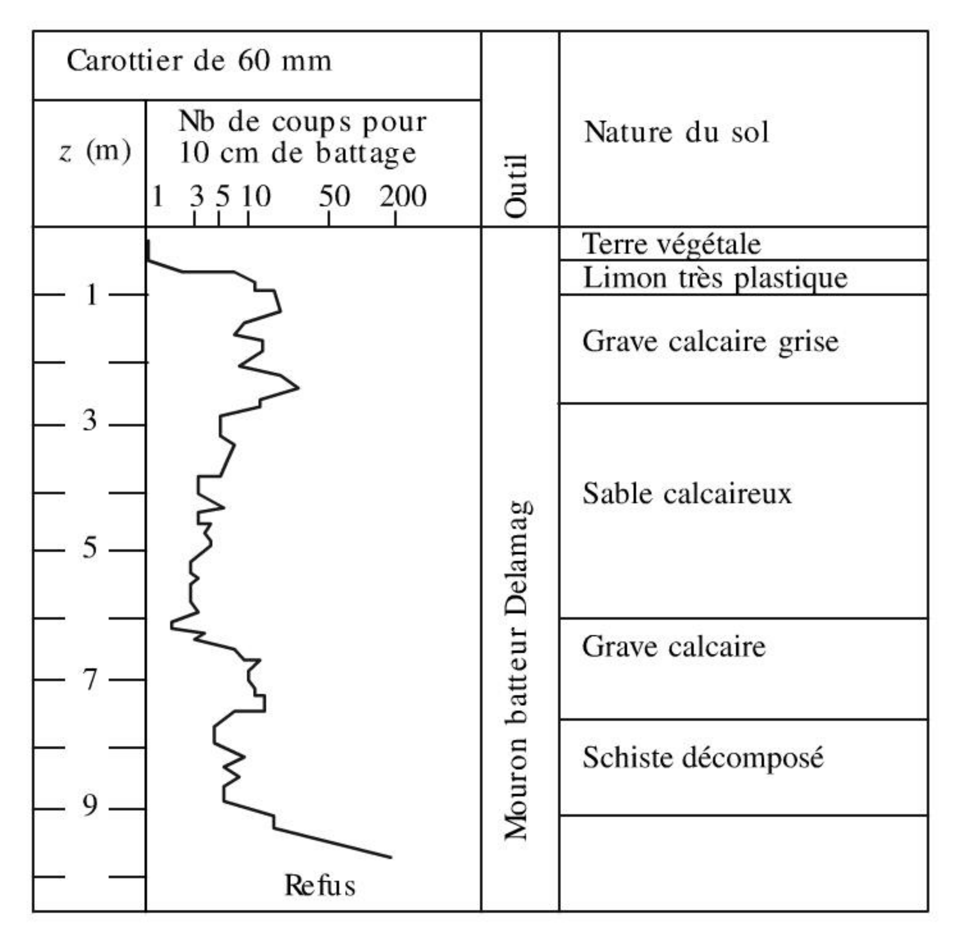


Figure 2.12 Exemple de profil de battage (d'après Philipponnat et Hubert [31]).

L'appareil est constitué de plusieurs éléments : un contrôleur pression-volume, des tubulures de connexion et la sonde de mesure (Fig. 2.13).



Figure 2.13 Cellule de mesure du pressiomètre Ménard.

La sonde de mesure de type E comprend :

- une cellule de mesure centrale (diamètre 5 cm, hauteur 22 cm) constituée par un tube métallique revêtu d'une membrane en caoutchouc déformable latéralement. La dilatation radiale de cette membrane est obtenue par injection d'eau sous pression contrôlée ;

- deux cellules de garde de même conception situées de part et d'autre de la cellule centrale. Elles ont pour fonction d'assurer une répartition cylindrique et uniforme des contraintes et des déformations au droit de la cellule centrale de mesure ;
- des tubulures en cuivre – une pour chaque cellule de garde, deux pour la cellule de mesure – qui permettent l'admission du gaz et de l'eau ;
- l'ensemble de la sonde est revêtu d'une protection unique en caoutchouc renforcé pour éviter les perforations des membranes au contact d'éléments durs dans le sol.

Dans les sondes actuellement utilisées (type G), les membranes des cellules de garde ont été supprimées. Les sondes sont constituées par un cylindre métallique unique revêtu dans sa partie centrale d'une membrane en caoutchouc, l'ensemble étant protégé sur toute sa longueur par une gaine dilatable qui recouvre cette membrane. Dans les éléments des extrémités de la sonde, le gaz est directement au contact de la gaine de protection. Les sondes plus utilisées sont les sondes AX ($d = 44$ mm, $H = 37$ cm) et BX ($d = 58$ mm, $H = 21$ cm).

Le mode opératoire de l'essai est le suivant. Dans un premier temps, un forage destructif destiné à recevoir la sonde pressiométrique est effectué. Cette opération est délicate car la fiabilité des résultats est conditionnée par la qualité du forage. Différentes techniques peuvent être employées : le forage préalable est réalisé avec une tarière ou un outil de roto-percussion ou encore par introduction par battage de la sonde placée dans un tube fendu. La technique utilisée dépend de la nature du sol. Pour éviter l'altération des parois du forage, le trou est souvent rempli de bentonite. La sonde pressiométrique est ensuite descendue à la profondeur désirée. Puis l'essai de chargement est effectué en gonflant les cellules par paliers de pression et en mesurant à chaque palier le volume injecté dans la cellule principale à 1 s, 15 s, 30 s et 60 s. En règle générale, un essai pressiométrique comporte au moins une dizaine de paliers de pression. L'augmentation de pression dépend de la nature du terrain (Tab. 2.6).

L'identification du sol, le fonçage de la sonde ou le forage de l'avant-trou permettent d'estimer la pression limite escomptée P_l et donc de définir les paliers $\Delta P = 0{,}1 P_l$. Pour limiter le remaniement du sol, des sondes auto-foreuses ont été mises au point notamment par le LCPC et Ménard.

Tableau 2.6 Augmentation de pression par palier en fonction du type de sol.

Nature du sol	ΔP par palier (MPa)
Terrains très faibles (vases...)	0,005
Terrains faibles (argile molle, sable lâche)	0,025
Terrains résistants (marnes raides)	1 à 2

L'ensemble des résultats obtenu à une profondeur donnée est synthétisé sous la forme de courbes (Fig. 2.14) :

- *la courbe pressiométrique* obtenue en exprimant les pressions P en fonction du volume de la cellule V en fin de palier (à 60 secondes) ;
- *la courbe de fluage* obtenue en exprimant la différence de volume entre les volumes mesurés entre les instants 30 s et 60 s en fonction de la pression.

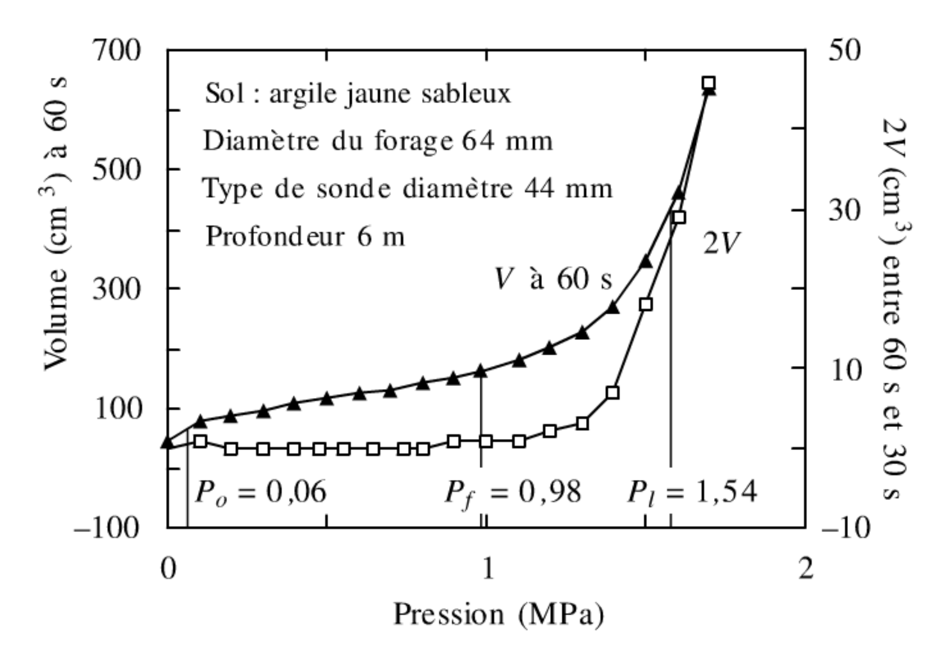


Figure 2.14 Exemple de courbe pressiométrique.



Les courbes brutes sont corrigées pour tenir compte de la surcharge piézo-métrique due à la hauteur de la colonne d'eau dans l'appareil, de la rigidité élastique propre de l'ensemble membrane+gaines et de la compressibilité interne de l'appareil. Il est alors possible d'établir le profil pressiométrique comme celui indiqué sur la figure 2.15, en faisant apparaître les grandeurs intéressantes relevées à chaque profondeur.

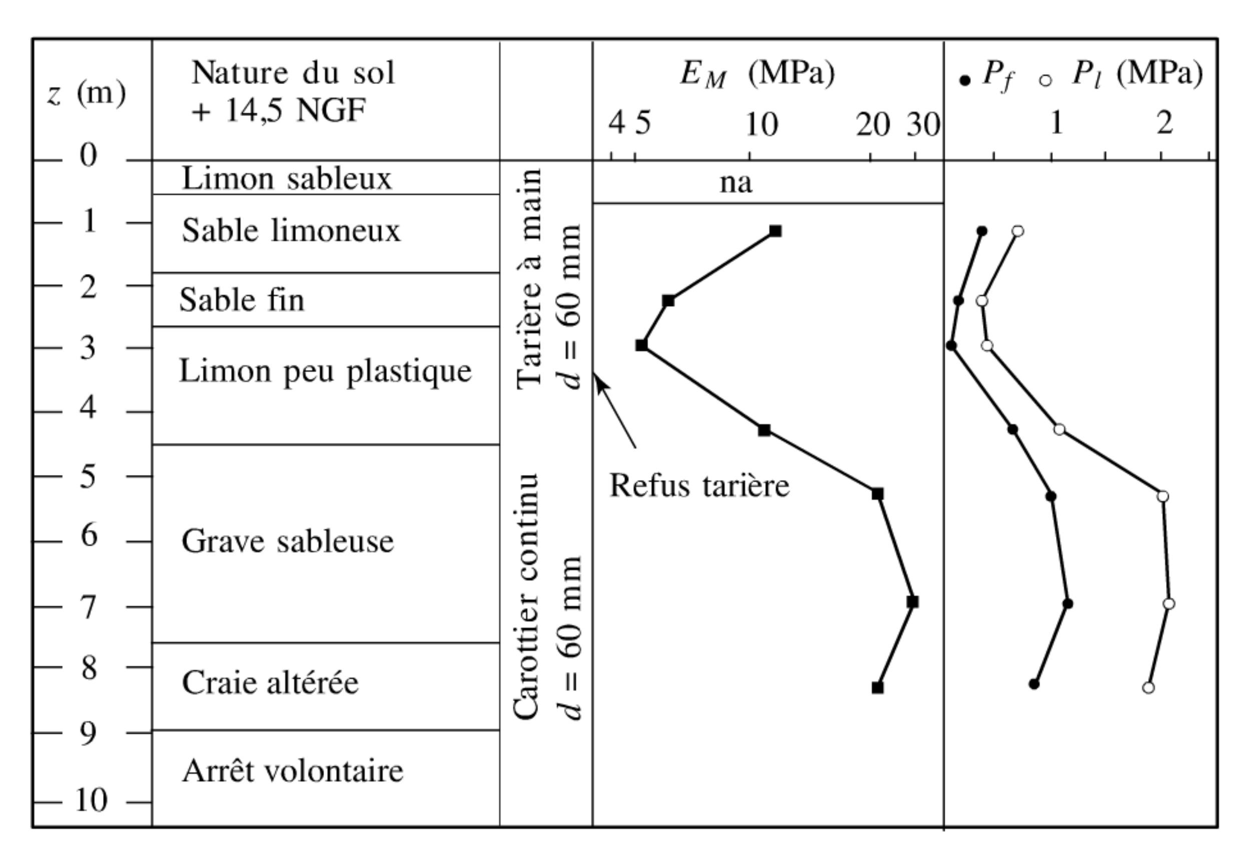


Figure 2.15 Exemple de profil pressiométrique (d'après Philipponnat et Hubert [31]).

■ Interprétation des résultats

On retrouve sur la courbe pressiométrique (Fig. 2.14) les phases du comportement du sol observées dans les essais de laboratoire. La première phase du chargement correspond à la mise en contact de la membrane avec le sol suivie de la recompaction du sol. Lorsque la pression augmente, le terrain autour du trou qui s'était progressivement dé-comprimé au forage se recomprime. À la fin de cette phase, la pression atteint la valeur P_o qui est appelée *pression horizontale de Ménard*. L'expérience

montre qu'en général cette pression est différente de la pression horizontale du terrain à l'état naturel.

Ensuite, on observe une phase pseudo-élastique où la pression augmente de manière quasi linéaire avec la variation de volume. Au terme de cette phase, on atteint la pression P_f appelée *pression de fluage* car elle correspond très approximativement avec le premier point de discontinuité de la courbe de fluage.

Cette partie de la courbe permet de mesurer le module pressiométrique E_M qui est donnée par l'expression :

$$E_M = 2(1+\nu)(V_0 + V_m)\frac{\Delta P}{\Delta V}, \qquad (2.12)$$

où V_o est le volume de la sonde de mesure au repos, V_m le volume injecté dans la sonde depuis le début de l'essai jusqu'au milieu de la phase pseudo-élastique, ν le coefficient de Poisson (par convention égal à 0,33), $\Delta P = P_f - P_o$ et ΔV la variation de volume de la cellule correspondante.

Pour des valeurs de pression supérieures à la pression de fluage P_f, des surfaces de glissement se développent autour du trou. Le sol entre dans le domaine de plasticité et des déformations de fluage apparaissent. Dans la dernière phase, de grandes déformations apparaissent et la pression tend vers une *pression limite* P_l. Elle est généralement définie conventionnellement comme étant la pression correspondant au doublement du volume de la cellule par rapport à son volume initial.

Dans les sols fins cohérents, cet essai permet de déterminer la cohésion non drainée C_U par la formule empirique suivante :

$$C_U = \frac{P_l - P_0}{5{,}5}. \qquad (2.13)$$

Remarques

1. Le protocole d'essai appliqué ne permet que d'accéder au comportement à court terme.
2. Les caractéristiques définies précédemment sont utilisées pour résoudre certains problèmes de mécaniques des sols (tassements, capacités portantes des fondations…).

2.2.6 Essais de chargement superficiel

Pour évaluer de manière précise le tassement sous une fondation ou sa force portance, on a parfois recours à des essais in situ avec des conditions de chargement proches de celles qui seront rencontrées sur l'ouvrage géotechnique, notamment l'essai de la plaque et l'essai sur la table qui sont présentés ci-dessous.

Essai à la plaque

L'essai à la plaque est un essai conventionnel utilisé pour le dimensionnement des chaussées. Le dispositif comprend une plaque posée sur le sol et un système mécanique qui exerce le chargement mécanique sur cette plaque.

Les plaques circulaires dont les dimensions usuelles sont (diamètre 20 cm – 40 cm – 75 cm) sont soit rigides (disques métalliques de 20 à 30 mm d'épaisseur renforcés éventuellement par des raidisseurs) soit semi-rigides (disques métalliques de 20 mm d'épaisseur sur lesquels on colle des disques en caoutchouc ou en Néoprène) ou encore souples (membrane en caoutchouc fixée sur un tube en acier fermé dont l'intérieur est rempli d'eau).

La charge est appliquée par l'intermédiaire d'un vérin hydraulique, la force de réaction étant reprise par une charge de réaction constituée par un engin de plusieurs tonnes (Fig. 2.16). La mesure du tassement se fait par l'intermédiaire d'une poutraison de mesure qui s'appuie sur le terrain à une distance suffisante pour échapper aux mouvements de terrain pendant l'essai. Les charges maximales sont choisies de telle sorte que le

sol reste en phase élastique, typiquement 20 kN pour la plaque de 20 cm, 40 kN pour celle de 40 cm et 750 kN pour celle de 70 cm.



Figure 2.16 Essai de chargement à la plaque.

Pour un même essai, on opère avec les trois plaques en commençant par la plus grande. On applique la charge maximale d'essai pendant 30 s pour la mise en place de la plaque, puis après remise à zéro, on applique trois cycles de charge jusqu'à la charge maximale suivie de la décharge et on mesure le tassement. À titre d'exemple, on donne ci-dessous une interprétation de l'essai à la plaque circulaire rigide dans le cas d'un terrain homogène élastique de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν.

Le tassement w est donné en fonction de la pression moyenne appliquée sur la plaque p par la formule de Boussinesq :

$$w = \frac{\pi}{2}\frac{1-2\nu^2}{E}pR, \tag{2.14}$$

où R est le rayon de la plaque et p la pression moyenne.

Le module de déformation obtenue par cette méthode est souvent sous-estimé. On préfère de ce fait définir un autre paramètre qui est le module de réaction K_W appelé module de Westergaard :

$$K_W = \frac{p}{W}. \tag{2.15}$$

Essai à la table

Le dispositif est composé d'un plateau ou table de 1,50 à 2,00 m de côté qui repose sur un fût central de longueur variable suivant la profondeur de la couche étudiée. Ce fût est généralement carré d'une vingtaine de centimètres de côté. Une plaque d'appui carrée ou circulaire de 25 à 30 cm de côté ou de diamètre est fixée à l'autre extrémité du fût et s'appuie sur le sol au niveau de la fondation future.

La table est chargée progressivement par paliers croissants. Les enfoncements de la plaque d'appui sont mesurés à des intervalles de temps déterminés. Un autre mode opératoire consiste à enfoncer le fût à l'aide d'un vérin prenant appui sous la table, qui est alors fixe. L'essai est terminé lorsqu'il y a affaissement brusque sous un faible accroissement de la charge. Il s'est alors produit une rupture du sol. À partir de la contrainte de rupture ainsi mesurée, on calcule la contrainte admissible du sol soumis à l'essai.

L'essai à la table est un essai destructif car le terrain doit être terrassé au niveau du sol ou du sous-sol futur. Si ce terrassement général n'a pas été réalisé au moment de l'essai, il est nécessaire d'excaver à ce niveau une plate-forme assez large. La réalisation de l'essai est alors longue et son coût particulièrement élevé. L'interprétation de l'essai est délicate, ce qui le réserve à des opérations particulières.

On donne sur la figure 2.17 le résultat d'un essai de chargement. On constate une certaine similitude avec les résultats de l'essai pressiométrique.

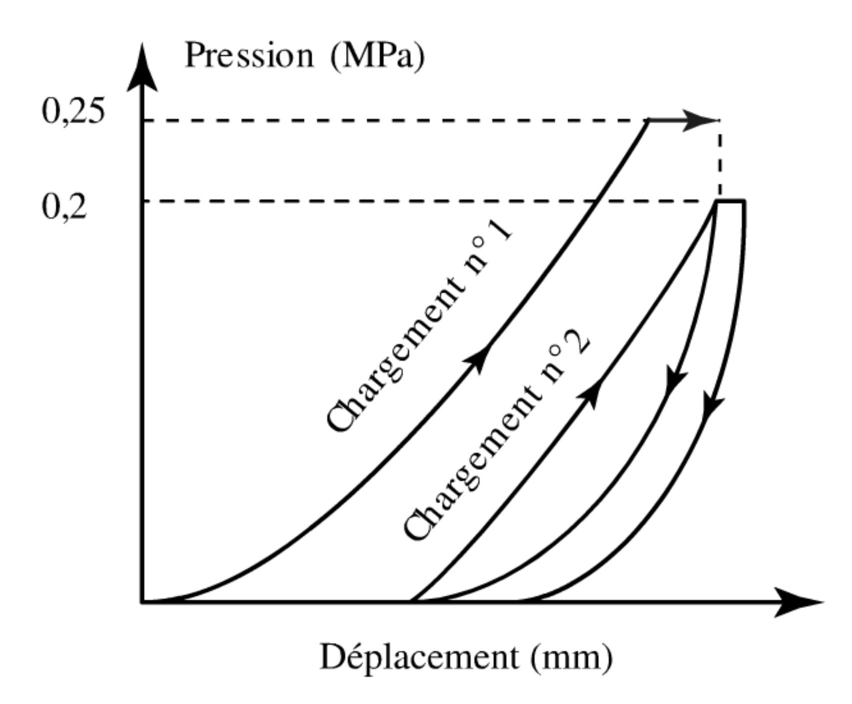


Figure 2.17 Résultat d'un essai de chargement à la plaque (http://arvor-geo.fr).

2.3 Essais hydrauliques in situ

2.3.1 Introduction

Une bonne connaissance à la fois du comportement hydraulique du sol et du réseau hydraulique souterrain existant dans la zone de construction de l'ouvrage à implanter est nécessaire pour se prémunir vis-à-vis de dégradations de l'assise du terrain suite à des mouvements d'eau. À côté des essais de caractérisation en laboratoire de la perméabilité hydraulique des sols k, il existe un large éventail d'essais in situ qui apportent des informations complémentaires. Parfois, pour déterminer la perméabilité des sols la mesure indirecte in situ est la seule possible, notamment si les propriétés hydrauliques du sol sont trop affectées par le remaniement lors de l'extraction de carottes de sol ou s'il n'est pas possible d'extraire des échantillons de taille suffisante pour obtenir une valeur pertinente de la perméabilité. Enfin, ces essais in situ permettent de caractériser le réseau hydraulique du terrain, notamment :

- de connaître le niveau de la nappe ;
- de détecter les spécificités du réseau hydraulique (état de saturation du sol, la distribution du réseau poreux, la présence de cavités, de grandes fissures) ;
- de fournir des indications qui seront utiles pour évaluer à l'aide d'outils de simulations appropriés le comportement hydraulique du terrain en phase de construction de l'ouvrage et durant son utilisation et par la suite son impact sur son comportement mécanique des sols et des structures de fondation.

La description des essais hydrauliques proposée ici est succincte. Nous renvoyons le lecteur désireux d'en savoir davantage vers la littérature spécialisée qui existe sur le sujet.

2.3.2 Essai de pompage dans un aquifère

Les essais de pompage dans une zone disposant d'une nappe souterraine sont réalisés pour caractériser la performance d'un ouvrage de captage d'eau (Fig. 2.18). Les résultats permettent d'une part de connaître la capacité de production de l'ouvrage et d'autre part de définir les meilleures conditions de son exploitation. Il s'agit à la fois de caractériser la transitivité de l'aquifère et son coefficient d'emmagasinement. Dans le cas où d'autres points de captage sont déjà existants. Il s'agit également d'évaluer l'impact du futur prélèvement sur le fonctionnement

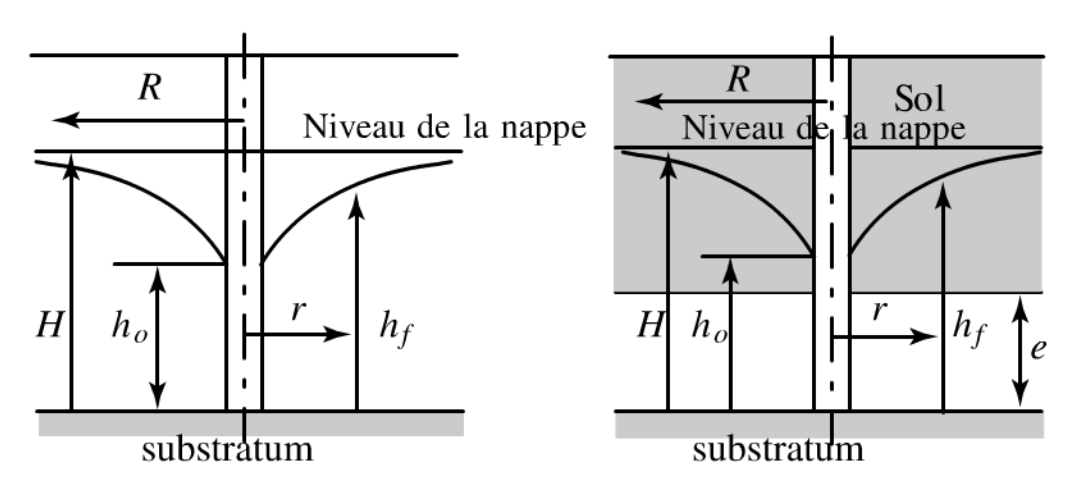


Figure 2.18 Essai de pompage.

des ouvrages voisins. Ce type d'essai est donc effectué lors de la mise en place d'un forage d'exploitation et l'installation d'une station de pompage. Les tests de pompage sont également effectués après les opérations de nettoyage et de développement du forage.

Dans l'essai de pompage, un premier mode de sollicitation de la nappe consiste à faire un essai où un débit de pompage constant est maintenu sur une durée suffisamment longue – de plusieurs heures à plusieurs jours, voire plusieurs semaines – de sorte que s'installe le régime d'écoulement permanent. La réalimentation de la nappe est alors égale au débit d'extraction de l'eau. La stabilisation du rabattement de la nappe $h(r,t) = h_f(r)$ et du cône de dépression est atteinte et dans le sondage la dénivelée est constante $(H - h_o)$.

Une zone autour du puits est affectée par ce rabattement. Elle est délimitée par le rayon d'action du puits R qui dans la pratique peut être estimé par la formule de Sichardt :

$$R = 3\,000(H - h_o)\sqrt{k}, \tag{2.16}$$

où R, H et h_o sont exprimés en mètres.

Dupuit a établi une formule liant le débit de pompage avec le rayon d'action R en fonction de la perméabilité k du milieu en considérant un sol homogène et isotrope. Le débit Q s'exprime de la manière suivante (formule de Dupuit) :

$$Q = C \times \pi k \frac{H - h_o}{\ln \frac{R}{r_0}}, \tag{2.17}$$

où r_0 est le rayon du sondage et C une constante qui dépend de la disposition de la nappe, dont la valeur est précisée ci-dessous :

- dans le cas d'une nappe libre :

$$C = H + h_o\,; \tag{2.18}$$

- dans le cas d'une nappe captive d'épaisseur e :

$$C = 2e. \tag{2.19}$$

Dans la pratique, la formule 2.17 reste difficile à appliquer car le rayon d'action R n'est pas connu avec une précision suffisante, même en l'estimant par la formule de Sichardt. Pour cette raison, on mesure généralement l'abaissement de la nappe h_1 et h_2 dans deux piézomètres placés à deux distances r_1 et r_2 du sondage et on utilise la relation suivante :

$$Q = C_{piezo}\, \pi k \frac{h_2 - h_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \qquad (2.20)$$

avec

- dans le cas d'une nappe libre :

$$C_{piezo} = h_2 + h_1\,; \qquad (2.21)$$

- dans le cas d'une nappe captive d'épaisseur e :

$$C = 2e. \qquad (2.22)$$

Un autre mode de sollicitation consiste à réaliser un essai de pompage par paliers de rabattement. Cette procédure est mise en place pour déterminer le rapport à court terme entre le rendement et le rabattement dans le forage testé. Une suite de pompage à différents débits d'eau constant Q_i est effectuée et le rabattement h_i dans le puits est mesuré. Chaque palier de débit est effectué sur une durée Δt_i relativement courte (entre 60 et 120 minutes) et d'un palier au suivant le débit est accru. Les paliers peuvent se succéder directement ou être espacés d'un temps d'arrêt au moins équivalent au temps du palier permettant ainsi à la nappe de retrouver son niveau d'équilibre initial.

Cette procédure permet d'effectuer l'essai complet sur une période d'environ 24 heures. L'écoulement dans la nappe s'effectue donc constamment en régime transitoire. Généralement, on prévoit quatre à cinq paliers au total, les débits de pompage progressant par échelons plus ou moins réguliers entre le minimum et le maximum. Le débit du dernier palier est égal ou supérieur au débit d'exploitation prévu lorsque l'ouvrage de captage fonctionne à pleine capacité. La courbe caractéristique $Q_i(h_i)$ renseigne sur l'apparition de turbulences dans l'écoulement de l'eau souterraine

vers la pompe qui produire des détériorations à long terme. Elle permet de définir un débit critique à ne pas dépasser au cours de l'exploitation de l'ouvrage de captage.

2.3.3 Essai Lefranc

La réalisation d'un essai de pompage est une opération coûteuse. Il est donc intéressant de profiter des sondages de reconnaissance du sol pour évaluer la perméabilité des sols meubles ou pulvérulents en réalisant un essai Lefranc qui est plus simple à mettre en œuvre (Fig. 2.19).

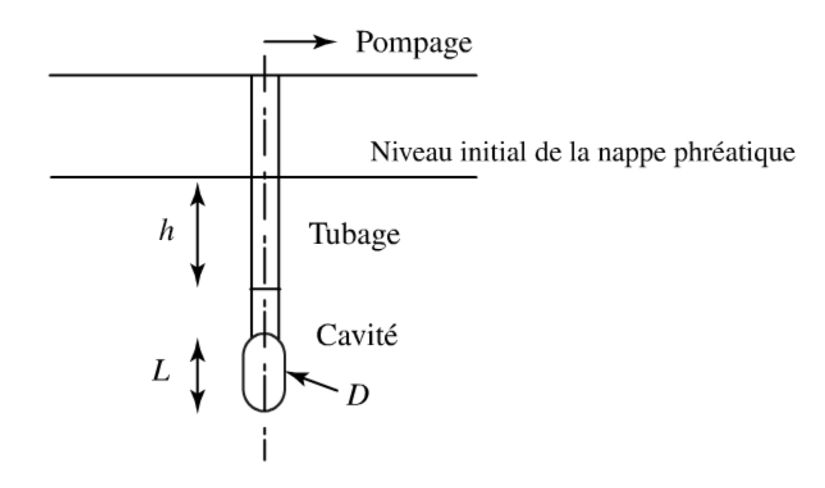


Figure 2.19 Principe de l'essai Lefranc.

Dans un forage tubé pour étanchéifier une zone donnée, une cavité de filtration est creusée dans le fond du trou. On crée ensuite une variation initiale de charge h entre l'eau présente dans le tube et l'eau dans le milieu en pompant l'eau dans le sondage. L'évolution de cette charge différentielle $h(t)$ au cours du temps est mesurée lorsqu'on apporte ou prélève un débit d'eau Q constant dans la cavité.

Pour les milieux suffisamment perméables ($k > 10^{-4}$ m.s^{-1}), on attend qu'un régime permanent s'installe $h(t) = h$. Si le milieu est homogène et que la loi de Darcy s'applique, le débit évolue linéairement avec la charge h et est donné par :

$$Q = kCh, \tag{2.23}$$

où C est un coefficient caractéristique de la forme de la cavité de filtration et du milieu.

Si la cavité de filtration est de forme sphérique de diamètre D, C vaut :

$$C = 2\pi D. \tag{2.24}$$

Si la cavité de filtration a une géométrie cylindrique à base circulaire de diamètre D et de hauteur L et d'élancement $\lambda = \frac{L}{D}$, alors C vaut :

$$C = 2\pi D \frac{\left(\lambda^2 - 1\right)^{1/2}}{\ln\left(\lambda + \left(\lambda^2 - 1\right)^{1/2}\right)}. \tag{2.25}$$

Cette expression analytique est obtenue en faisant l'hypothèse que la cavité cylindrique est un ellipsoïde de révolution de diamètres respectifs D et L.

La perméabilité hydraulique moyenne du terrain supposée homogène est alors déterminée par :

$$k = \frac{Q}{Ch}. \tag{2.26}$$

Lorsque la perméabilité est trop faible ($k < 10^{-4}$ m.s^{-1}), le régime permanent est trop long à atteindre. On réalise alors un essai en régime transitoire en créant une charge différentielle initiale h_o à l'instant t_0 et en mesurant au cours du temps t l'évolution de la charge différentielle $h(t)$. En supposant qu'à chaque instant un régime stationnaire est atteint, ce qui permet d'exprimer que $Q(t) = kCh(t)$, on peut exprimer l'équation de bilan de masse suivante :

$$Q(t) = S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = kCh(t), \tag{2.27}$$

avec $S = \frac{\pi D^2}{4}$ dans le cas d'une cavité cylindrique.

Par intégration de l'équation 2.27, le coefficient de perméabilité k est identifié à l'aide de la formule :

$$k = \frac{S(t - t_0)}{C} \ln \frac{h_o}{h}. \qquad (2.28)$$

Des variantes de cet essai existent, où la cavité de filtration n'est plus située au fond du sondage mais dans une zone intermédiaire entre deux zones tubées du sondage. Un bouchon en argile ou un obturateur est alors placé au fond du sondage pour éviter toute remontée d'eau par le bas.

2.3.4 Essai Lugeon

L'essai Lugeon est utilisé pour apprécier la perméabilité et le degré de fracturation des massifs rocheux. Le principe de l'essai consiste à injecter de l'eau sous pression dans une zone de sondage isolée par un ou deux obturateurs (deux packers gonflables ou un packer et le fond). L'évolution du débit injecté en fonction de la pression appliquée permet d'obtenir une indication sur la perméabilité à grande échelle du milieu qui est essentiellement corrélée à la morphologie du réseau de fissures.

L'interprétation des résultats doit être faite avec prudence. La loi de Darcy qui est valable pour les écoulements laminaires ne l'est plus toujours localement à l'échelle des fissures où l'écoulement de l'eau peut être soit laminaire, soit turbulent.

L'essai Lugeon permet de définir un paramètre d'absorption d'eau qui s'exprime en unité lugeon. Par définition, un lugeon est égal au débit d'un litre de fluide par minute, injecté dans un tronçon de forage d'un mètre de longueur sous une surpression d'un mégapascal maintenue constante pendant 10 minutes. 1 lugeon correspond grossièrement à 10^{-7} m.s^{-1}.

2.4 Essais de mesures in situ et de surveillance

Pour des raisons diverses, on peut être amené à suivre le comportement du sol in situ avant ou pendant ou après la réalisation de l'ouvrage. On présente ci-dessous une petite liste non exhaustive d'appareils utilisés.

2.4.1 Piézomètre

On distingue deux types d'appareils :

- Le *piézomètre ouvert* : un tube crépiné (percé de trous) à son extrémité inférieure est descendu au fond du sondage de reconnaissance. La partie crépinée est isolée de la partie supérieure par un bouchon d'argile faisant étanchéité. La pression mesurée vaut : $u = \gamma_w h$ où γ_w le poids volumique de l'eau et h est le niveau d'eau enregistré. Dans les sols imperméables, le temps de réponse de cet appareil est très long (parfois plusieurs jours).
- Le *piézomètre à volume constant* : l'appareil est constitué d'un cylindre creux en bronze fritté, rempli d'eau dès la mise en place de la sonde (par battage par exemple). La pression mesurée au manomètre est : $u - \gamma_w H$ où u est la pression interstitielle au niveau de la sonde, γ_w le poids volumique de l'eau et H la dénivellation entre ce point et le manomètre. Ce type d'appareil est surtout destiné à mesurer les surpressions interstitielles dues à la mise en place des ouvrages. Le temps de réponse est très rapide.

2.4.2 Capteur de pression

La mesure des contraintes in situ est difficile à réaliser car la présence de capteurs introduit dans le sol une hétérogénéité qui peut modifier l'état de contraintes à son voisinage. De plus, les capteurs de pression permettent de mesurer uniquement les contraintes totales. Pour connaître les contraintes effectives, il faut les associer à des capteurs de mesure de pression interstitielle.

Le principe de ces capteurs consiste à équilibrer la pression des terres par une contre-pression exercée soit par l'intermédiaire d'un fluide (liquide ou gaz) où par un système qui se déforme élastiquement et dont on mesure la déformation.

Ces capteurs sont employés principalement dans les cas suivants :

- l'étude de la distribution des pressions de contact d'une fondation ou d'un remblai ;
- l'étude de la poussée des terres sur un mur de soutènement ;
- l'étude de la pression des terres sur l'extrados d'un tunnel ou d'une galerie.

Le capteur Gloetz mesure la contrainte normale sur un plan donné (Fig. 2.20). Il est constitué d'un petit vérin plat, à parois flexibles rempli d'huile ou de mercure. Cette cellule est en communication avec une soupape à membrane, composée d'un cylindre partagé en deux compartiments par une membrane souple. L'un des compartiments est relié au capteur, l'autre à une pompe par deux tubulures (admission et retour). Sous l'effet d'une sollicitation extérieure, l'huile de la cellule se met en charge et vient appuyer sur la membrane de la soupape, obturant l'orifice du retour d'huile. À l'aide de la pompe, on envoie de l'huile dans la conduite d'admission, la pression permettant de décoller la membrane équilibre la pression dans la cellule et permet de mesurer la pression extérieure.

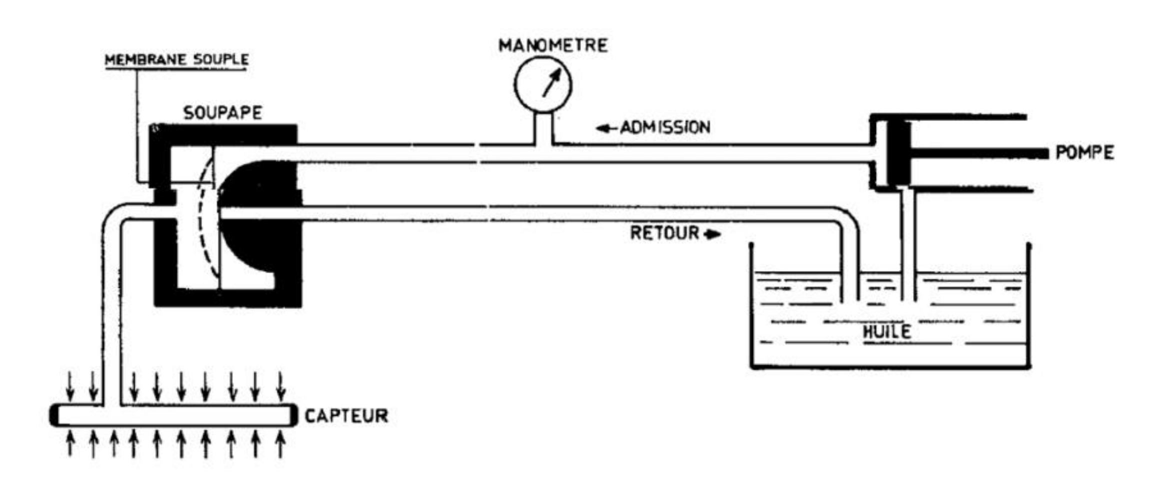


Figure 2.20 Capteur de pression hydraulique Gloetz.



Les cellules Gloetz sont des instruments robustes, fiables, mais de précision moyenne (de l'ordre de 10 kPa). Une variante de ce capteur utilisant un système pneumatique et non plus hydraulique permet d'obtenir une meilleure précision (de l'ordre de 1 kPa). Le capteur à cordes vibrantes est constitué par deux membranes circulaires rigides encastrées sur une couronne et opposées face à face (Fig. 2.21). Sur chaque face sont fixés des jauges à corde vibrante. Sous l'action des terres, les membranes fléchissent et produisent une variation de tension des cordes vibrantes qui se traduit par une variation de la fréquence de vibration.

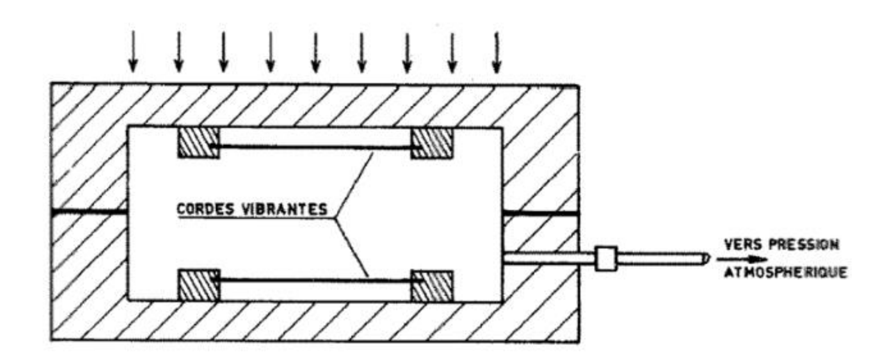


Figure 2.21 Capteur de pression à cordes vibrantes (d'après Soil Instrument Limited).

B

Caractéristiques des sols et des roches

Les vocables « sol » et « roche » n'ont pas la même signification pour les géologues et les géotechniciens.

Dans les études géologiques, la roche est souvent considérée comme la matière constituant le sol. Elle peut être meuble (gravier, sable,limon, argile, tourbe, cendre volcanique) ou cohérente calcaire, dolomien gypse, granite…). Dans les études géotechniques, il est d'usage de désigner par le vocable « sol » tous les matières recouvrant la surface de l'écorce terrestre, qu'il s'agisse de roches ou de matériaux meubles. Les roches sont compactes, dures et résistantes, tandis que les « sols meubles » sont cohérents ou pulvérulents.

Certains matériaux peuvent être désignés par l'un ou l'autre selon leur état. C'est notamment le cas de l'argile. À faible profondeur, sa cohésion étant limitée, elle peut être désignée par le vocable sol. Consolidée à de grandes profondeurs, l'argile possède une résistance mécanique élevée et de ce fait, s'apparente davantage à une roche.

La récente norme a mis fin à l'ambiguïté et propose une seule définition pour la roche et deux définitions pour le sol.

Roche : agrégat de minéraux qui ne peut pas être fragmenté ou désagrégé par un cycle de mouillage et de séchage.

Sol : le vocable a deux significations :

- agglomérat naturel provenant de l'altération des roches et constitué :
  - de particules solides séparables par trituration sous l'eau provenant soit de la désagrégation de roches par altération mécanique ou chimique sous l'effort d'agents naturels, soit de la décomposition d'organismes végétaux ou animaux, soit d'une activité industrielle ;
  - de fluides interstitiels (eau, air, gaz).
- nom générique pour l'ensemble des sols et des roches.

Cette partie a pour objectif d'apporter des connaissances sur la nature et la composition des sols et des roches, leurs principales propriétés physiques et mécaniques, les moyens pour identifier ces propriétés et d'introduire quelques éléments permettant la modélisation du comportement thermo-hydro-mécanique. Ces données sont essentielles pour dimensionner les ouvrages géotechniques et comprendre leur fonctionnement en service.

3 Minéraux de base des sols

3.1 Définition

Un *minéral* est une portion de matière solide, naturelle, homogène qui, la plupart du temps, possède une microstructure ordonnée (cristal) à une certaine échelle d'observation (grenat, quartz, mica…).

Une même espèce minérale peut donner naissance à plusieurs sortes de roches. C'est le cas des grains de quartz qui donnent un grès si les grains sont reliés par un ciment naturel, du sable si ces grains ne sont pas liés, des quartzites si ces grains sont fortement engrenés les uns aux autres.

La *roche* est constituée par l'assemblage de plusieurs minéraux de même espèce ou non. Par exemple, le granit est formé de grains de quartz, de feldspath, de mica.

Les minéraux se forment à partir :

- de vapeurs, par condensation (dépôts de fumerolles volcaniques) ;
- de liquides fondus, par solidification (refroidissement de laves volcaniques (basaltes, trachytes...), de magma (granites…) ;
- de solutions aqueuses, par précipitation par évaporation, réactions chimiques (calcaires…) ;
- de solides, par recristallisation (roches métamorphiques comme le gneiss).

3.2 Caractéristiques des minéraux

3.2.1 Structures cristallines

De nombreux minéraux se présentent sous la forme de *cristaux*. Cette structure périodique est obtenue à partir d'un motif de base appelé maille. Il en existe sept différents qui se décomposent en quatorze réseaux de Bravais.

Exemples : la pyrite (cubique) FeS_2, le spinelle $MgAl_2O_4$ (cubique) minéral que l'on trouve dans le gneiss, le marbre, les roches magmatiques basiques, le quartz SiO_2 (trigonal/hexagonal), la calcite $CaCO_3$ (trigonal/hexagonal) présente dans les calcaires, les marbres, le gypse $CaSO_4$, $2H_2O$ (monoclinique), la kaolinite (triclinique) $Al_2Si_2O_5(OH)_4$ présente dans l'argile.

Plusieurs espèces minérales peuvent exister à partir d'une même composition chimique et former ce qu'on dénomme des *variétés polymorphes*. La silice en est un bon exemple. Elle existe sous la forme de quartz (système hexagonal), de tridynite (système orthorhombique pseudo hexagonal), de cristobalite (système tétragonal pseudo cubique), d'opale (amorphe).

La forme des grains des minéraux qui se sont développés sans entraves (*minéraux automorphes*) est conditionnée par la nature de leur structure cristalline. Les grains ont une forme polyédrique limitée par des surfaces planes ; les faces opposées sont souvent parallèles et les angles entre les faces sont constants.

Mais le plus souvent la forme des cristaux est quelconque car le développement du minéral a été entravé par la présence d'autres cristaux se formant en même temps. On parle alors de *minéral xénomorphe*.

Les structures cristallines comportent des défauts surfaciques et volumiques :

- les *macles* sont des défauts surfaciques correspondant à des défauts d'empilement. Ils apparaissent notamment lorsque deux cristaux qui grossissent, entrent en contact. Elles conditionnent le faciès du grain ;

- les *défauts volumiques* sont générés par la présence de corps étrangers piégés au moment de la cristallisation.

Ces structures minérales peuvent être observées par des analyses de lames minces au microscope optique polarisant. Les lames sont obtenues à partir d'échantillons découpés, meulés et polis jusqu'à obtenir une épaisseur d'environ 20 à 30 micromètres. D'autres techniques plus sophistiquées peuvent être utilisées comme l'analyse au microscope électronique à transmission, l'analyse au microscope électronique à balayage munie d'une sonde EDS et ou d'une sonde EBSD ou encore l'analyse DRX à l'aide d'un diffractomètre à rayons X.

3.2.2 Faciès

Le *faciès* décrit la microstructure de l'échantillon à plus faible grandissement. Il peut par exemple se présenter sous forme de paillettes ou lamelles (mica, chlorite...), aciculaire ou fines aiguilles, prismatique (sel gemme), arborescente ou dentritique (cuivre), sans forme définie…

Pour exprimer certaines particularités de la structure, on introduit un vocabulaire spécifique :

- la structure est dite *porphyrique* lorsqu'elle est composée de cristaux millimétriques ou centimétriques enrobés dans une matrice plus fine ;
- elle est *orientée* lorsqu'elle est anisotrope à cause de l'orientation préférentielle des cristaux ;
- elle est *schisteuse* si elle est orientée ;
- elle est *litée* si elle présente des alternances de couches minérales différentes ;
- elle est *fissurée* si un réseau de fissures traverse la roche.

Dans les minéraux, on distingue des cassures soit irrégulières dans les cristaux de forte résistance (quartz…), soit sous forme de *clivage* ; le clivage étant un plan de cassure correspondant à un plan de plus faible résistance du cristal. Le mica présente de superbes plans de clivage.

On observe également dans certaines roches des *cassures conchoïdales*. Les cassures sont nettes et brillantes, la surface est onduleuse, les ondulations s'arrangeant concentriquement à partir du point de choc qui a produit la fracture dont la forme intérieure rappelle celle d'une coquille. C'est le cas de l'obsidienne.

3.2.3 Principaux minéraux

L'oxygène (61 % en masse), le silicium (21 %) et l'aluminium (6 %) sont les trois éléments atomiques les plus répandus dans la croûte terrestre. C'est une des raisons pour lesquelles les silicates sont les minéraux les plus abondants dans le sol.

■ Minéraux à base de silice

□ Silice et silicates sans alumine

Ce sont les minéraux les plus abondants dans les roches de la croûte terrestre. Le motif de base est le *tétraèdre de silicium* $(SiO_4)^{4-}$ avec un atome de silicium disposé au centre et des atomes d'oxygène disposés aux quatre coins (Fig. 3.1). Ce tétraèdre possède quatre valences libres.

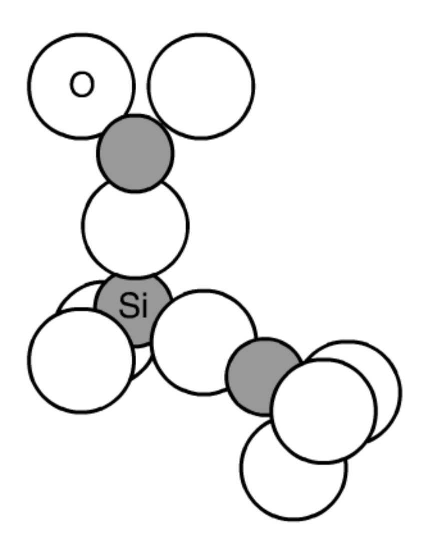


Figure 3.1 Structure tétraédrique de la silice.

Dans le quartz, chaque atome d'oxygène est associé à deux tétraèdres (4 SiO_2). Dans les autres silicates sans alumine, cette disposition n'est plus respectée. D'une part les tétraèdres sont plus éloignés les uns des

autres et d'autre part des cations extérieurs divalents viennent saturer une valence des atomes d'oxygène (par exemple le talc, le pyroxène et le péridot contiennent des atomes de magnésium).

Alumino-silicates

Dans ces minéraux, les ions Si sont partiellement remplacés par des ions Al, ce qui confère au tétraèdre une valence libre supplémentaire, donc la possibilité de fixer un cation supplémentaire.

Les *feldspaths* calco-sodiques ou *plagioclases* forment une grande famille en fonction du nombre d'ions Al remplaçant les ions Si. De plus, les rayons ioniques des atomes de potassium K et de calcium Ca étant voisins, ils peuvent facilement permuter dans la structure.

Les roches alcalines ou feldspathoïdes contiennent une grande quantité d'*alcalins* (Na, K) et renferment un peu moins de silice.

Les *phyllosilicates* se caractérisent par le fait que les tétraèdres sont soudés les uns aux autres par trois côtés de façon à constituer un assemblage plan à maille hexagonale servant de base à un feuillet (0,7 à 1,4 nm d'épaisseur). Le plus souvent, les ions Si sont remplacés par des ions Al.

Exemples

- Dans le mica, dans un tétraèdre sur quatre, Si est remplacé par Al et des cations situés entre les feuillets saturent les valences libérées et assurent une certaine cohésion vis-à-vis du glissement inter-feuillet : clivage en lamelles.
- Dans les argiles, les valences libres sont saturées par des ions OH^- et les feuillets mobiles sont de ce fait plus mobiles.

Silicates d'alumine

Ces silicates ne doivent pas être confondus avec les précédents car l'atome Al n'est pas substitué à l'atome Si mais est situé à l'extérieur du tétraèdre et joue le rôle d'un cation. On rencontre ce type de minéraux dans les *roches métamorphiques* (andalousite Al_2SiO_5…).

Minéraux non silicatés

On distingue les éléments natifs, les sulfures, les oxydes (bauxite), les chlorures (sel gemme NaCl), les sulphates (gypse, anhydre $CaSO_4$), les carbonates (calcite $CaCO_3$, dolomite (Ca,Mg)(CO_3)), les phosphates.

3.2.4 Identification des minéraux à l'aide d'observations macroscopiques

L'observation visuelle est un moyen simple, rapide et adaptée pour identifier sur le terrain le sol ou la roche. Une loupe et des moyens sommaires permettant de réaliser quelques tests simples mettant en jeu leurs propriétés physico-chimiques sont suffisants dans nombre de cas pour obtenir des informations suffisantes pour classer le sol. Quelques caractéristiques du sol à analyser sont précisées ci-dessous :

- *forme* : elle n'est caractéristique que si les minéraux sont automorphes ;
- *couleur* : elle est peu caractéristique car elle est modifiée par la présence d'impuretés, à moins de réduire le minéral en poudre ;
- *éclat* : c'est un caractère complexe dû au pouvoir réflecteur du minéral et de sa microfissuration interne ;
- *cassure* : elle peut être lisse, inégale, conchoïdale, clivage (mica en forme de feuillets, calcite présentant trois plans de clivage suivant les faces du rhomboèdre) ;
- *densité* : c'est une bonne caractéristique pour identifier le minéral ;
- *dureté* : celle-ci est établie à partir de dix minéraux de référence et permet de classer les minéraux (échelle de dureté de Mohs) ;
- *action de l'eau* : elle permet de déceler les sols qui sont sensibles à l'eau, comme par exemple les argiles ;
- *action de l'acide chlorhydrique* : elle se traduit par des réactions chimiques entre l'acide et le minéral avec une effervescence plus ou moins forte selon le type de minéral.

4 Les argiles

Les argiles sont des sols particuliers car très sensibles à la présence d'eau. Elles sont à l'origine de nombreux désordres dans les constructions géotechniques. Bien comprendre la nature de ces matériaux et leurs interactions avec l'eau présente dans le sol est essentiel pour dimensionner les ouvrages géotechniques. Ce chapitre fournit quelques informations sur ces matériaux.

4.1 Structure cristalline des feuillets

Les argiles sont des sols constitués de minuscules particules minérales ($d < 2$ µm). Elles résultent de la désintégration physique ou mécanique des roches suivie d'une transformation chimique. Les minéraux argileux sont des *silicates d'aluminium hydratés* se présentant sous la forme de feuillets dans lesquels on distingue deux minéraux de base (Fig. 4.1) :

- la silice tétraédrique $(SiO_4)^{4-}$;
- l'hydroxyde d'aluminium octaédrique $Al(OH)_3$.

Les phyllosilicates possèdent une structure organisée en plans anioniques successifs (Fig. 4.1). La charpente de la structure cristalline est réalisée à partir d'anions O^{2-} ou OH^- jointifs dans lesquels sont disposés les cations Ca^{2+}, K^+, Na^+, Mg^{2+}, Fe^+, Fe^{3+}, Al^{3+}, Si^{4+}… Dans le feuillet élémentaire octaédrique où l'élément de base est l'hydroxyde d'aluminium, chaque aluminium est entouré de six atomes d'oxygène (soit O, soit des groupes OH).

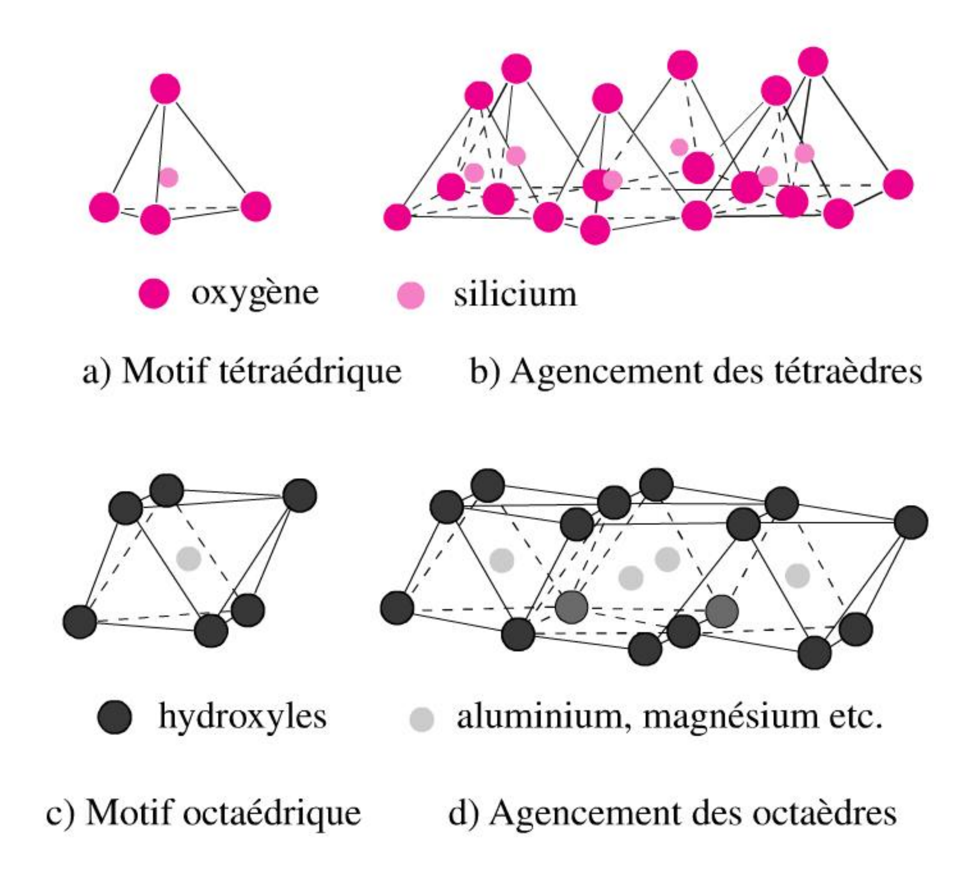


Figure 4.1 Motifs de base et feuillets élémentaires des particules d'argile.

Les feuillets de base sont composés d'un feuillet élémentaire octaédrique et d'un ou deux feuillets élémentaires tétraédriques reliés entre eux par des liaisons covalentes. Pour des raisons de visualisation, ces feuillets sont représentés par un rectangle pour le feuillet octaédrique et un trapèze pour le feuillet tétraédrique (Fig. 4.2).

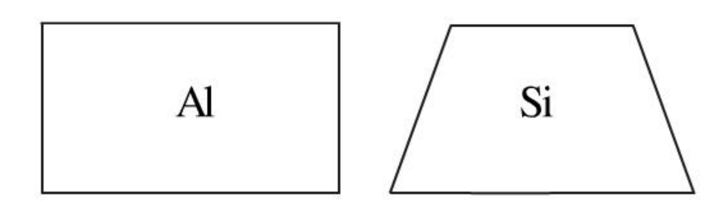


Figure 4.2 Symboles des feuillets octaédrique d'Al et tétraédrique de Si.

Ils forment des ensembles cristallins plans. Le fait que les feuillets ne sont pas neutres électriquement explique les fortes interactions avec les solutions salines.

4.2 Types d'argiles

Il existe de nombreuses argiles parmi lesquelles la kaolinite, les smectites, l'illite et les vermiculites sont les plus connues. Les trois dernières diffèrent entre elles par les éléments d'insertion disposés entre les feuillets.

4.2.1 Minéraux argileux dits 1/1 ou TO

Dans ces minéraux, le feuillet de base de 0,7 nm d'épaisseur est composé d'un feuillet tétraédrique et d'un feuillet octaédrique, la liaison entre les deux étant élevée (Fig. 4.3). La particule est formée d'un empilement de ces feuillets de base, les liaisons entre les feuillets étant du type liaison hydrogène, donc des liaisons faibles. Aux extrémités, la particule est chargée électriquement. Les argiles entrant dans cette famille se distinguent par la nature de la structure du feuillet octaédrique. On peut citer : la kaolinite, la nacrite, l'halloysite, l'antigorite, la cronstedtite…

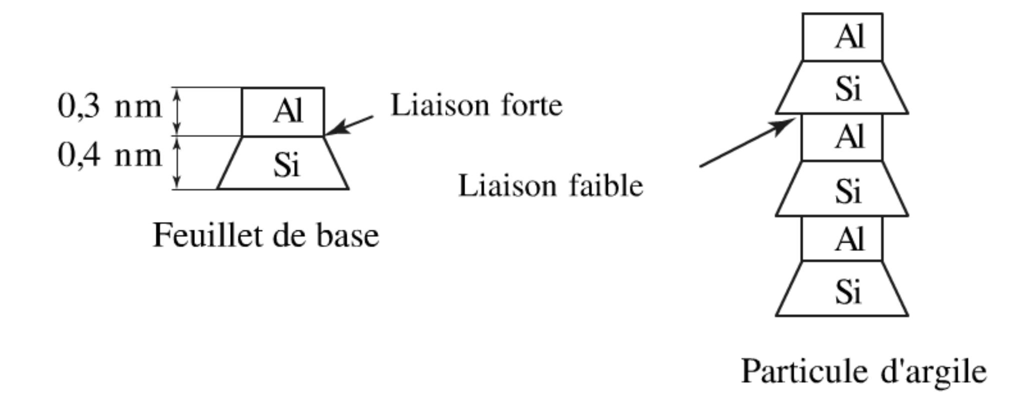


Figure 4.3 Particule d'argile dites 1/1 ou TO.

La *kaolinite* est une de ces argiles la plus connue. Sa formule chimique est $Si_2\ Al_2\ O_5\ (OH)_4$. La surface spécifique ne dépasse pas 20 à 30 m^2g^{-1}.

4.2.2 Minéraux argileux dits 2/1 ou TOT

Dans ces minéraux, le feuillet de base de 0,7 nm d'épaisseur est composé de deux feuillets tétraédriques encadrant un feuillet octaédrique, la liaison entre les deux étant élevée (Fig. 4.4). En fonction de

l'espèce, l'épaisseur du feuillet de base varie entre 1 et 1,8 nm. Entre dans cette famille les argiles connues comme la pyrophyllite, la montmorillonite, la beidellite, la vermiculite, la muscovite, l'illite…

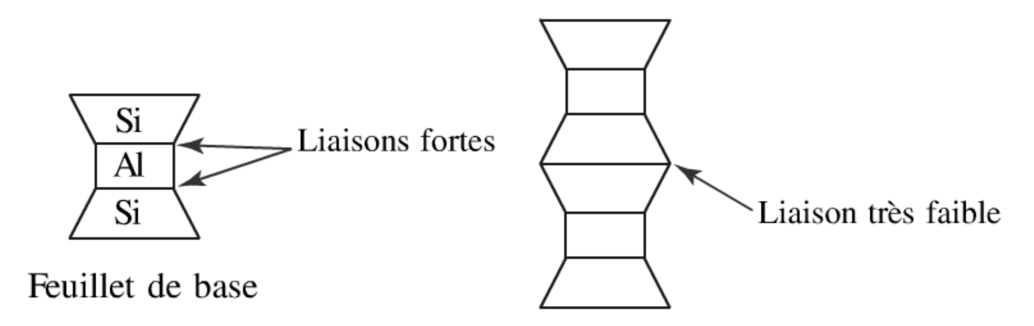


Figure 4.4 Particule d'argile dites 2/1 ou TOT.

Smectites

La *smectite* est une sous-famille de cette famille de minéraux. Sa formule chimique est définie par $Si_4\ Al_{(2-x)}\ Mg_x\ O_{10}\ (OH)_2,\ nH_2O$ avec x le nombre de cations échangeables.

La *montmorillonite* appartient à la famille des smectites (Fig. 4.5). La liaison entre deux feuillets de base est une liaison hydrogène très faible, de sorte que jusqu'à cinq à six couches de molécules d'eau (avec des ions) peuvent s'intercaler facilement entre les feuillets. Ceci explique que ces particules sont sujettes à d'importants gonflements ou retraits en fonction de la teneur en eau. Ces particules sont également chargées électriquement aux extrémités. La surface spécifique peut atteindre 150 $m^2 \cdot g^{-1}$. La montmorillonite est utilisée pour ses propriétés colloïdales.

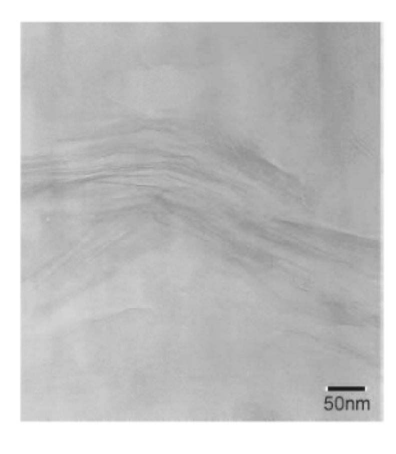


Figure 4.5 Montmorillonite (extrait de [51]).

Vermiculites

La *vermiculite* est une famille d'argile de même nature que les smectites. Sa formule chimique est $(Mg, Ca)_{0,7}$ $(Mg, Fe, Al)_6(Al, Si)_8O_{22}$ $(OH)_4$ $8H_2O$. C'est une argile à faible capacité d'expansion qui a une structure de micas au sein desquels les ions K^+ situés entre les feuillets de base ont été remplacés par des cations Mg^{2+} et Fe^{2+} qui s'insèrent avec des molécules d'eau.

Illites

L'*illite* fait également partie d'une famille de minéraux argileux dits 2/1 ou TOT. Sa formule chimique est $Si_{(4-x)}$ Al_x Al_2 O_{10} $(OH)_2$ xK.

Sa structure est très proche de celle des micas (muscovite, biotite) et d'autres silicates (feldspath, feldspathoïdes, orthose et autres). Des ions potassium sont intercalés entre les feuillets tétraédriques de deux feuillets de base (Fig. 4.6). De ce fait les liaisons deviennent assez fortes et les molécules d'eau ne peuvent pratiquement plus s'intercaler.

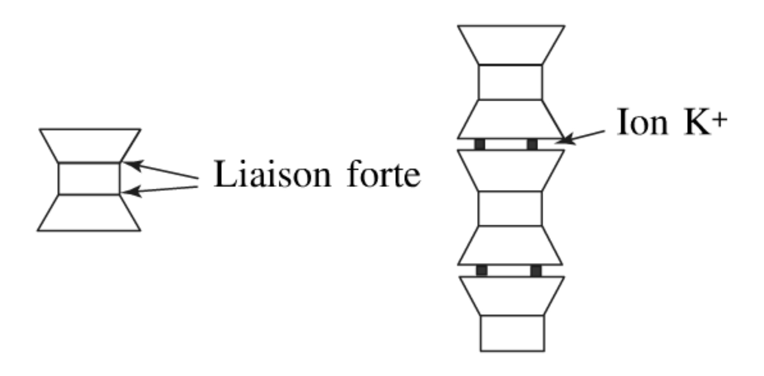


Figure 4.6 Particule d'illite.

Remarque

L'ion Al^{3+} présent dans les feuillets octaédriques peut être remplacé par d'autres ions comme Mg^{2+} principalement dans la montmorillonite et l'illite. Il en résulte un déséquilibre électrique qui est compensé par la fixation sur la surface de cations Ca^{2+}, Li^+, K^+, Fe^{2+}. Aux extrémités de la particule, il y a également des déséquilibres électriques et des fixations de cations. Ces cations dits « échangeables » jouent un rôle important dans le comportement des argiles.

4.2.3 Résumé synthétique des caractéristiques des argiles

On peut résumer les différents types d'argile par le tableau issu du livre de Mitchell, 1976 [27] (Tab. 4.1) et par les photographies obtenues au MEB issues du même ouvrage. Dans cette synthèse apparaît l'intérêt d'une classification en fonction de la structure en feuillet de ces matériaux (Fig. 4.7 et 4.8).

Tableau 4.1 Quelques données.

Type	Surf. spéc. ($m^2.g^{-1}$)	Diamètre (µm)	Ép. feuillet (nm)
Kaolinite	10-20	0,3-3	0,7
Illite	80-100	0,1-2	1
Smectite	800	0,1-2	1

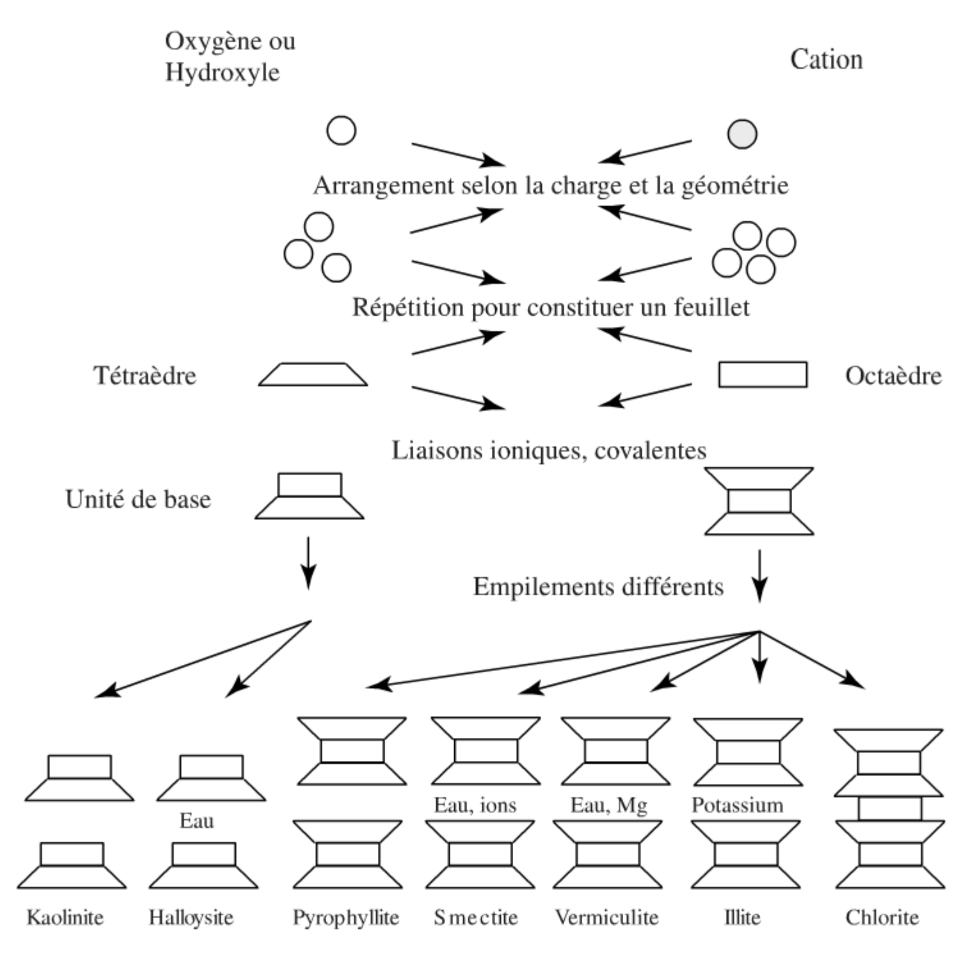


Figure 4.7 Types d'argiles (d'après Mitchell [27]).

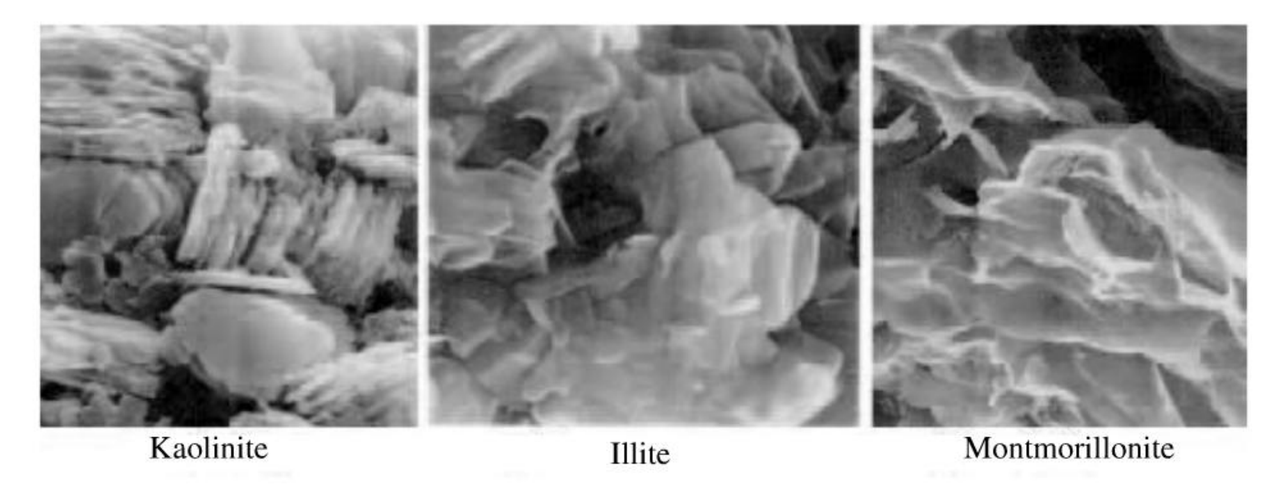


Figure 4.8 Photos au MEB d'argiles (extrait de Mitchell [27]).

4.3 L'eau adsorbée

Les particules d'argiles sont très plates et leur surface spécifique est très grande. Des anions (OH^- et O_2^-) sont répartis sur la périphérie des particules, les bords sont donc fortement chargés négativement et attirent des charges positives. Comme les molécules d'eau sont polaires, il peut y avoir attraction et adsorption de molécules d'eau à la surface des particules. Plusieurs couches de molécules d'eau peuvent ainsi être adsorbées. En raison de leur orientation particulière, ces molécules ont des propriétés physiques différentes de celles de l'eau normale (viscosité élevée, élimination plus difficile par traitement thermique ($200\ °C < T < 300\ °C$).

5 Description et classification des sols

Les sols et les roches sont composés en général de trois phases (Fig. 5.1) :

- **une phase solide** constituée par les minéraux présents sous forme de particules de différentes tailles, soudées entre elles dans le cas des roches ou simplement en contact dans le cas des sols ; cette phase peut contenir des éléments organiques ou divers matériaux provenant de l'activité humaine ;
- **une phase liquide** constituée d'eau, éventuellement chargée d'éléments chimiques divers ;
- **une phase gazeuse** (air).

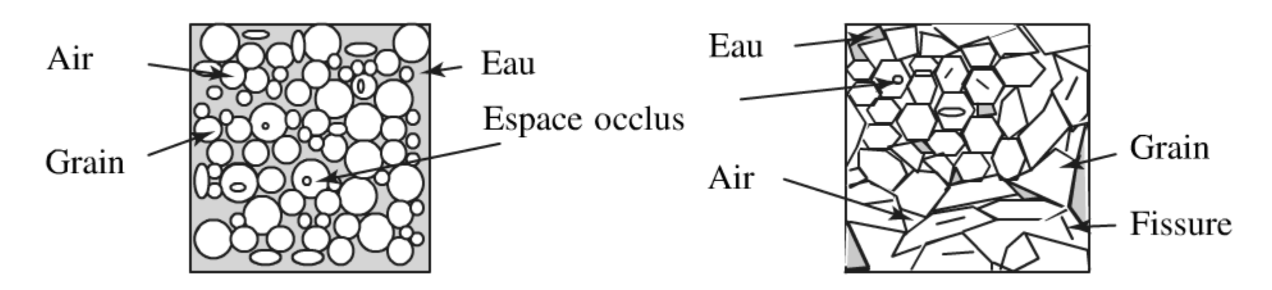


Figure 5.1 Microstructure des sols et des roches.

Les deux dernières phases sont situées dans l'espace non occupé par la phase solide, qui peut être connecté, non connecté ou partiellement connecté. Dans le cas de roches, il s'agit des pores et/ou des fissures. Dans le cas des sols, cet espace est l'espace des vides situés entre les grains.

La morphologie du sol joue un rôle essentiel sur les propriétés thermo-hydro-mécaniques du sol et doit être analysée avec la plus grande attention. C'est un des points qui seront abordés dans ce chapitre.

La figure 5.2 introduit les notations utilisées et recense les paramètres importants du milieu poreux partiellement saturé. Les quantités V désignent des volumes et M des masses.

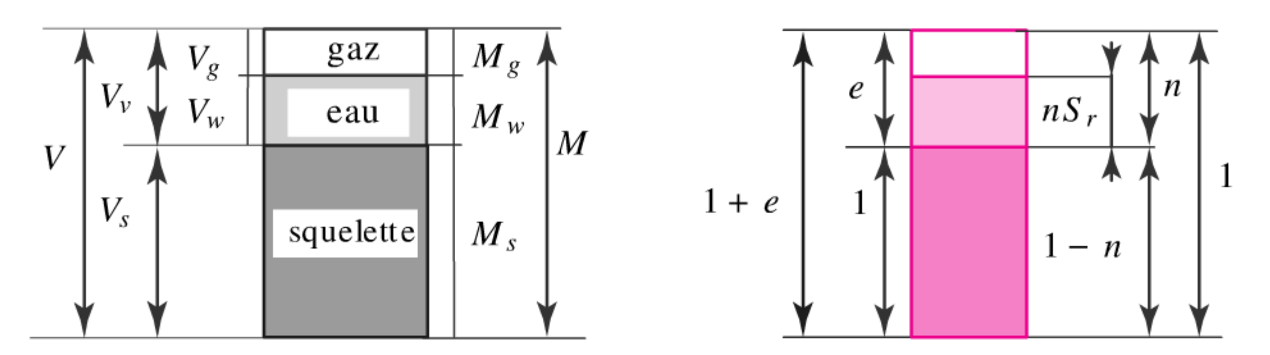


Figure 5.2 Paramètres de caractérisation des phases dans un sol.

5.1 Paramètres globaux du sol

5.1.1 Définitions

On désigne par ρ la masse volumique apparente du sol (parfois notée ρ_h pour souligner la présence d'eau avec h pour humide), ρ_d la masse volumique apparente du sol sec (l'indice d correspond à dry = sec), ρ_w la masse volumique de l'eau (l'indice w correspond à water), ρ_s la masse volumique des grains (l'indice s correspond à solide ou squelette), ρ_{sat} la masse volumique d'un sol saturé ($V_v = V_w$). Les poids volumiques correspondants notées γ_i sont obtenues par $\gamma_i = \rho_i g$ avec g accélération de la pesanteur.

La porosité n du milieu est définie comme le rapport du volume des vides ($V_v = V_w + V_g$) sur le volume total ($V = V_s + V_w + V_g$) :

$$n = \frac{V_v}{V}, \tag{5.1}$$

où V_s est le volume de la phase solide contenu dans le volume V, V_w le volume d'eau et V_g le volume d'air.

Dans un volume unité $V = 1$, le volume des vides correspond à n, tandis que $(1 - n)$ correspond au volume occupé par les grains. Ceci explique les indications fournies dans la partie de droite de la figure 5.2.

Lorsqu'un milieu se compacte, il y a à la fois variation du volume des vides et du volume total. Si la variation du volume total est importante, la porosité n'est pas le paramètre le mieux adapté pour l'étude. On introduit de ce fait une autre grandeur appelée indice des vides e qui est le rapport du volume des vides sur le volume des grains :

$$e = \frac{V_v}{V_s}. \quad (5.2)$$

Les relations entre ces deux paramètres se déduisent facilement (voir Fig. 5.2) :

$$e = \frac{n}{1-n} \qquad n = \frac{e}{1+e}. \quad (5.3)$$

L'expérience montre que la porosité du sol dépend de son degré de compaction : elle est plus élevée lorsque le sol est simplement déversé que si le sol a été compacté. L'état actuel du sol doit donc également être quantifié par rapport à un état de référence. On définit de ce fait l'indice de compacité du sol I_d par la relation suivante :

$$I_d = \frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}}. \quad (5.4)$$

Dans cette équation, e_{max} est l'indice des vides le plus grand possible, correspondant à la compacité naturelle la plus faible, obtenu par simple déversement sous faible hauteur (état le plus lâche possible). La valeur e_{min} est l'indice des vides le plus faible possible, correspondant au plus grand serrage possible (état le plus dense possible).

Cet indice, utilisé pour les sols grenus (sables), est généralement compris entre 0,4 et 1. On peut définir l'état de compaction d'un sable en se référant à la classification suivante :

- sable lâche : $I_d \leqslant \frac{1}{3}$;
- sable moyennement compacté : $\frac{1}{3} < I_d \leqslant \frac{2}{3}$;
- sable serré ou compact : $I_d > \frac{2}{3}$.

Le degré de saturation S_r indique la quantité d'eau que contient le sol. C'est le rapport du volume d'eau sur le volume des vides :

$$S_r = \frac{V_w}{V_v}. \tag{5.5}$$

Lorsque le terrain est sec $S_r = 0$ ce qui n'est qu'une approximation car en pratique on n'a jamais $S_r = 0$; si le terrain est saturé alors $S_r = 1$.

La teneur en eau w est le rapport de la masse de l'eau M_w sur la masse du terrain sec M_s :

$$w = \frac{M_w}{M_s}. \tag{5.6}$$

Elle vaut donc également :

$$w = \frac{P_w}{P_s} = \frac{\gamma_w V_w}{\gamma_s V_s}. \tag{5.7}$$

Cette grandeur est facilement mesurable en laboratoire, alors que la détermination du degré de saturation nécessite la connaissance de l'indice des vides et de la densité du solide. On désigne par w_n la teneur en eau naturelle sur la fraction granulométrique (0 – 20 mm) et w_{nat} la teneur en eau naturelle du sol.

La relation qui lie les grandeurs w et e est la suivante :

$$w = \frac{e S_r \gamma_w}{\gamma}. \tag{5.8}$$

Ces définitions permettent de retrouver l'expression des poids volumiques apparents du sol humide et sec :

$$\gamma_h = \gamma_s(1-n) + S_r n \gamma_w, \tag{5.9}$$

$$\gamma_d = \gamma_s(1-n) = \frac{\gamma_s}{1-e}. \tag{5.10}$$

On peut également retrouver le degré de saturation :

$$S_r = \frac{w}{\gamma_w/\gamma_d - \gamma_w/\gamma}. \tag{5.11}$$

Une autre expression peut se révéler utile dans certaines applications :

$$\gamma_r = \gamma_s \frac{1+w}{1+e}. \quad (5.12)$$

La notion de poids volumique déjaugé γ' intervient dans les problèmes où le sol est situé sous le niveau d'une nappe phréatique. Chaque grain solide est soumis à la poussée d'Archimède et de ce fait son poids volumique apparent est égal à $\gamma_s - \gamma_w$. L'expression de γ' est donnée par :

$$\gamma' = (\gamma_s - \gamma_w)(1-n), \quad (5.13)$$

peut être rapprochée du poids volumique sec $\gamma_d = \gamma_s(1-n)$. Le poids volumique du sol immergé est alors égal à :

$$\gamma' + \gamma_w = (\gamma_s - \gamma_w)(1-n) + \gamma_w n = \gamma(1-n) + \gamma_w n. \quad (5.14)$$

Le tableau 5.1 résume les différentes relations entre tous les paramètres.

Tableau 5.1 Relations entre les principales caractéristiques (d'après Pailleret [30]).

	n	e	γ_d
n		$e/(1+e)$	$1-\gamma_d/\gamma_s$
e	$n/(1-n)$		$\gamma_s/\gamma_d - 1$
γ_d	$\gamma_s(1-n)$	$\gamma_s/(1+e)$	
γ	$\gamma_s(1-n)(1+w)$	$\gamma_s(1+w)/(1+e)$	$\gamma_d(1+w)$
γ_{sat}	$\gamma_s - n(\gamma_s-\gamma_w)$	$(\gamma_s+e\gamma_w)/(1+e)$	$(\gamma_s-\gamma_w)/\gamma_s\gamma_d + \gamma_w$
γ'	$(\gamma_s-\gamma_w)(1-n)$	$(\gamma_s-\gamma_w)/(1+e)$	$\gamma_d(\gamma_s-\gamma_w)/\gamma_s$
w_{sat}	$n\gamma_w/(\gamma_s(1-n))$	$e\gamma_w/\gamma_s$	$\gamma_w/\gamma_s - \gamma_w/\gamma_s$

	γ_{sat}	γ'
n	$(\gamma_s-\gamma_{sat})/(\gamma_s-\gamma_w)$	$1-\gamma'/(\gamma_s-\gamma_w)$
e	$(\gamma_s-\gamma_{sat})/(\gamma_{sat}-\gamma_w)$	$(\gamma_s-\gamma_w)/\gamma' - 1$
γ_d	$\gamma_s(\gamma_{sat}-\gamma_w)/(\gamma_s-\gamma_w)$	$\gamma_s/(\gamma_s-\gamma_w) - \gamma'$
γ	$\gamma_s(\gamma_{sat}-\gamma_w)(1-w)/(\gamma_s-\gamma_w)$	$\gamma_s\gamma'(1-w)/(\gamma_s-\gamma_w)$
γ_{sat}		$\gamma'+\gamma_w$
γ'	$\gamma_{sat}-\gamma_w$	
w_{sat}	$(\gamma_s-\gamma_{sat})\gamma_w/(\gamma_{sat}-\gamma_w)\gamma_s$	$\gamma_w(\gamma_s-\gamma_w)/\gamma_s\gamma_w - \gamma_s/\gamma_w$

5.1.2 Quelques données sur les sols

Tableau 5.2 Caractéristiques physiques de quelques sols (d'après Schlosser [41]).

Type de sol	γ (kN/m^3)	ρ (g/cm^3)	w (%)	e
Sable serré saturé	22	15	0,4	
Sable lâche saturé	17	1,7	52	1,4
Argile raide	20	2	26	0,7
Vase	14	1,4	120	3,2
Tourbe	11	1,1	450	12

5.2 Caractéristiques des grains du sol sec

5.2.1 Classifications

Dans les sols, on rencontre des grains de taille très variable couvrant une échelle étendue allant de quelques dixièmes de micromètre à quelques centimètres, voire décimètres. Plusieurs classifications sont proposées dans la littérature pour caractériser certaines plages de dimensions de grains, notamment celle d'Atterberg et celle du MIT (Tab. 5.3).

Tableau 5.3 Classifications des sols en fonction de la distribution de taille des grains.

Enrochements	> 200 mm	Enrochements	> 63 mm
Cailloux	200 - 20	Pierres	63 - 20
Graviers	20 - 2	Gravier gros	20 - 6
Sable gros	2 - 0,2	Gravier moyen	6 - 2
Sable fin	0,2 - 0,02	Gravier fin	2 - 0,6
Limon	20 µm - 2 µm	Sable gros	0,6 - 0,2
Argile	2 - 0,2	Sable moyen	0,2 - 0,06
Ultrargile	$<$ 0,2	Sable fin	60 µm - 20 µm
		Limon grossier	20 - 6
		Limon moyen	6 - 2
Atterberg		**MIT**	

La classification de l'agronome suédois Atterberg est la plus utilisée en France. Elle suit une progression géométrique de raison 1/10. La classification proposée par le MIT (Massachusetts Institute of Technology) permet d'affiner la classification pour les grains de petits diamètres et suit une progression géométrique de $10\sqrt{10}$ (série de Renard).

5.2.2 Granularité

La granularité est la distribution dimensionnelle des particules solides d'un sol. Elle a une grande influence sur les propriétés du sol. Elle conditionne notamment la compacité du sol, la perméabilité… De plus, d'un point de vue mécanique, les particules ne jouent pas toutes le même rôle. Les grains de taille typiquement supérieure à 50-100 μm sont en interaction mécanique de type contact de Hertz. En revanche, les forces de surface sont prépondérantes dans les grains de très petites tailles par rapport au contact de Hertz, et de ce fait, le comportement macroscopique en est fortement influencé.

Pour se fixer les idées, on a reporté dans le tableau 5.4 quelques valeurs de grandeurs caractéristiques de grains supposés sphériques et notamment leur surface spécifique qui est le rapport de la surface totale des grains par unité de masse de grains.

Tableau 5.4 Dimension de grains, masse et surface spécifique (hyp. : grains sphériques).

Type de sol	ϕ grain (mm)	Masse (g)	Nb. grains/g	Sp. (mm^2/g)
Cailloux	75	590	1,7	30
Sable courant	1	0,0014	720	2 300
Sable fin	0,1	$1{,}4 \cdot 10^{-6}$	$7{,}2 \cdot 10^{5}$	23 000
Limon moyen	0,01	$1{,}4 \cdot 10^{-9}$	$7{,}2 \cdot 10^{8}$	$23 \cdot 10^{5}$
Argile (Dmin)	0,001	$1{,}4 \cdot 10^{-12}$	$7{,}2 \cdot 10^{11}$	$2{,}3 \cdot 10^{6}$

Dans la pratique, comme les grains fins ont une forme plutôt allongée ou aplatie (cas notamment des argiles), leur surface spécifique S_p est plus élevée que celle indiquée dans le tableau 5.4.

La répartition granulaire est caractérisée par une analyse granulométrique (ou granulométrie), soit par tamisage pour les grains de diamètre supérieur à 80 µm, soit par sédimentométrie pour des particules de diamètre inférieur à 100 µm.

Pour tamiser le sol, on utilise des tamis. On procède au tamisage à sec ou sous l'eau. Le tamisage à sec n'est précis que pour des matériaux dénués de cohésion comme les sables et les graviers. Le tamisage sous l'eau est utilisé pour les limons et les argiles. Les refus sont séchés avant la pesée.

La sédimentométrie est basée sur l'exploitation de la loi de Stockes qui exprime la vitesse de décantation d'une particule sphérique dans un liquide visqueux en fonction du diamètre de la particule :

$$V = \frac{\gamma_s - \gamma_0}{1{,}8\eta D^2}, \tag{5.15}$$

où V est la vitesse (cm/s), γ_0 le poids volumique du fluide (kN/m^3), η la viscosité dynamique (Pa/s).

Dans la pratique, on opère sur une suspension de faible concentration (environ 20 g/l) et sur des grains de diamètres compris entre 1 et 100 µm. On mesure, à l'aide d'un densimètre, à différents instants et cotes la densité d'une suspension de sol initialement homogène.

La figure 5.3 montre une courbe granulométrique d'une grave argileuse. Elle donne pour chaque diamètre D la masse des particules de cette taille ou de taille inférieure. Cette masse est indiquée en pourcentage du poids total de la matière sèche de l'échantillon étudié. L'ordonnée y représente donc des tamisats cumulés. La courbe est dressée en coordonnées semi-logarithmiques afin de permettre une représentation précise sur toute l'étendue.

Pour caractériser la courbe granulométrique, on introduit généralement deux coefficients :

- **Le facteur d'uniformité granulométrique** C_U appelé aussi le coefficient de Hazen qui traduit le fait que la courbe est plus ou moins étalée :

$$C_U = \frac{D_{60}}{D_{60} D_{10}}. \tag{5.16}$$

Caquot et Kérisel considèrent qu'une granulométrie est étalée dès que ce facteur dépasse 2. Une granulométrie peut être considéré comme serrée lorsque C_U est inférieur à l'unité.

- Le facteur de courbure granulométrique C_C :

$$C_C = \frac{D_{30}^2}{D_{30}^2 (D_{10}/D_{60})}. \tag{5.17}$$

Pour obtenir un sol à moindre porosité, on cherche à optimiser la courbe granulométrique. De nombreux auteurs ont travaillé sur ce sujet. Talbot propose de caractériser la courbe optimale par l'équation suivante $y = (D/D_{100})^n$ avec n compris entre 0,1 et 0,5.

Ces courbes sont utilisées pour le choix des matériaux de fondation et de revêtement.

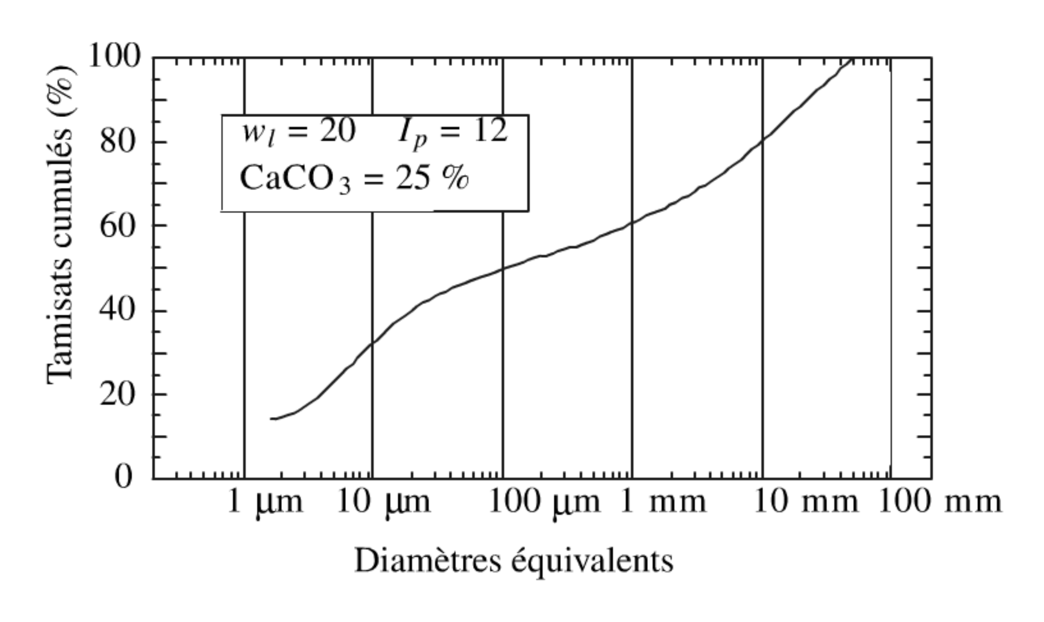


Figure 5.3 Courbe granulométrique d'une grave argileuse.

5.3 Comportement des sols fins en présence d'eau

5.3.1 Différents états de l'eau

L'eau est présente dans les sols existe sous différentes formes (Fig. 5.4) :

- **Eau de constitution.** Cette eau fait partie du réseau cristallin ; elle est difficilement déplaçable.
- **Eau liée.** Cette eau possède des propriétés différentes de celles de l'eau libre et interagit avec les grains fins. Elle est maintenue à la surface de ces grains par des forces d'attraction moléculaires et peut contenir de nombreux ions. Les molécules d'eau sont orientées perpendiculairement à la surface des grains. L'épaisseur de cette couche d'eau adsorbée – épaisseur moyenne de l'ordre de 5 nm – varie avec la nature du minéral, la surface spécifique et la courbure des grains. L'eau liée peut être décomposée en eau hygroscopique (couches de molécules d'eau les plus proches de la particule solide (extrait par dessiccation ou par vide poussé) et en eau pelliculaire (eau pouvant être déplacée par le jeu des forces moléculaires et extraite par centrifugation). On peut retenir que la viscosité et la température d'évaporation de cette eau sont plus élevées que celles de l'eau libre.
- **Eau capillaire.** Cette eau est retenue dans les pores du sol par les forces de capillarité dues à la tension superficielle qui se développent à l'interface eau-air.
- **Eau libre.** Cette eau remplit l'espace libre des pores et des interstices. Elle s'écoule dans le sol et obéit aux lois classiques de l'hydraulique.

L'eau joue un rôle fondamental sur les propriétés du sol et plus particulièrement sur celles des sols fins. Selon la teneur en eau, les particules peuvent être liées par des forces de surface plus ou moins importantes qui modifient profondément la rhéologie du matériau comme nous le verrons plus loin.

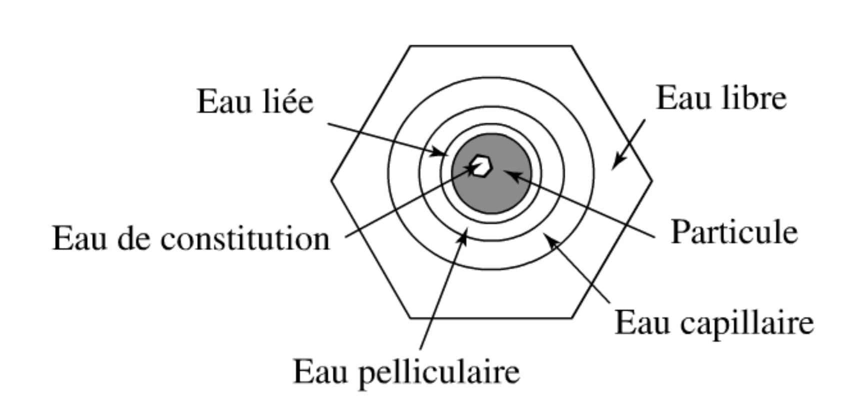


Figure 5.4 Différents types d'eau dans les sols fins.

Le comportement des sols fins dépend également de manière très sensible du degré de saturation en eau. Sur la figure 5.5, on a schématisé la microstructure d'un sol non saturé. L'eau adsorbée à la surface des grains forme des ménisques qui maintiennent les grains ensemble par des forces de surface. La présence d'air rend le matériau compressible, même sous un chargement instantané, car la phase gazeuse est très compressible. En revanche, lorsque le sol est saturé, la compressibilité du sol dépend de la facilité qu'a l'eau à s'évacuer à travers le solide.

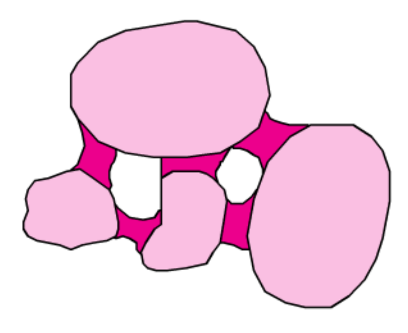


Figure 5.5 Présence de ménisques d'eau dans la microstructure d'un sol fin non saturé.

5.3.2 Grandeurs caractéristiques

Les essais permettant de définir les limites d'Atterberg constituent un bon moyen de caractériser l'influence de l'eau dans le sol sur son comportement mécanique. On définit en général :

- **La limite de liquidité** w_l. Elle correspond à la teneur en eau permettant un éloignement des particules suffisant pour annuler pratiquement les forces inter-particulaires. Elle caractérise donc la transition entre l'état plastique et l'état liquide. D'un point de vue pratique, on l'obtient en suivant la fermeture d'une saignée dans le sol contenu dans une coupelle qui est soumise à des chocs répétés. La limite est atteinte lorsque les lèvres de la saignée se rejoignent sur plus de 1 cm après 25 coups.
- **La limite de plasticité** w_p. Elle correspond à la teneur en eau maximale pour permettre une certaine liberté de déplacement relatif des particules, mais trop faible pour les éloigner au point de réduire fortement les forces de liaison. Elle caractérise la transition entre l'état solide et l'état plastique. Pratiquement, c'est la limite en dessous de laquelle il n'est plus possible de confectionner des boudins de 3 mm de diamètre.
- **La limite de retrait** w_s. Elle correspond à la teneur en eau atteinte lors du séchage d'un échantillon quand l'épaisseur de la pellicule d'eau est telle que les grains solides et l'eau liée sont arrivés en contact, ce qui interdit toute contraction ultérieure.

À titre indicatif, on donne dans le tableau 5.5 quelques valeurs de limites pour des sols fins.

Tableau 5.5 Exemples de Limites d'Atterberg et de retrait pour des sols.

Nature du sol	w_l	w_p	w_s
Limon sableux	21	16	14
Limon argileux peu plastique	40	25	18
Argile plastique	83	36	13
Bentonite	710	54	–

Dans son état naturel, le sol a généralement une teneur en eau w comprise entre w_p et w_l. Pour caractériser cet état, on définit deux indices :

▶ **L'indice de plasticité** I_p. Cet indice mesure l'intervalle des teneurs en eau à l'intérieur duquel le matériau est apte à se modeler (Tab. 5.6).

$$I_p = w_l - w_p \tag{5.18}$$

Tableau 5.6 Indice de plasticité des argiles et des limons.

Degré de plasticité	Indice de plasticité I_p
Non plastique	0 - 5
Peu plastique	5 - 15
Plastique	15 - 40
Très plastique	> 40

Les sables argileux ont en général un faible I_p ($I_p < 15$). Les valeurs moyennes courantes correspondent aux milieux argileux ($20 \leqslant I_p \leqslant 60$). Les fortes valeurs de I_p caractérisent les argiles gonflantes du type montmorillonite ($I_p > 75$).

▶ **Les indices de consistance** I_c **et de liquidité** I_l permettent de situer le sol de teneur en eau naturelle à l'intérieur de son domaine de plasticité :

$$I_c = \frac{w_l - w}{I_p} \quad \text{et} \quad I_l = 1 - I_c. \tag{5.19}$$

Les limites d'Atterberg sont réalisées sur la fraction granulométrique du sol de diamètre < 0,4 mm. Skempton a montré que l'indice de plasticité d'un sol dépendait de la fraction d'argile (pourcentage de particules de taille inférieure à 2 µm noté ici f_a) et que le rapport I_p était pratiquement proportionnel à f_a quelque soit la fraction d'argile présente dans le sol, pour un type de sol donné. Ceci a conduit à définir la notion d'activité colloïdale du sol A_C qui est donnée par l'expression :

$$A_C = \frac{I_p}{f_a}. \tag{5.20}$$

On peut alors proposer une classification des sols en quatre groupes donnés dans le tableau 5.7 :

Tableau 5.7 Caractérisation de l'activité d'une argile dans un sol.

Catégorie	Activité colloïdale A_C
Argile inactive	< 0,75
Argile normale	0,75 – 1,25
Argile active	1,25 – 2
Argile très active	> 2

À titre d'exemple, on donne ci-dessous quelques valeurs caractéristiques de sol (Tab. 5.8).

Tableau 5.8 Quelques valeurs caractéristiques pour des sols.

Minéral	w_l	I_p	A_C
Kaolinite	40 – 60	10 - 25	0,4
Illite	80 – 120	50 – 70	0,9
Sodium montmorillonite	700	650	7
Autres montmorillonites	300 – 650	200 – 550	1,5
Sol granulaire	< 20	0	0

5.3.3 Classification des sols fins

Il est possible, à la suite de Casagrande de classer les sols fins en fonction de leurs limites d'Atterberg dans un diagramme comportant en abscisse w_l et en ordonnée I_p. Les sols argileux sont approximativement séparés des limons par une droite $I_p = 0{,}73(w_l - 30)$. Cette ligne est utile pour la classification générale des sols (Fig. 5.6).

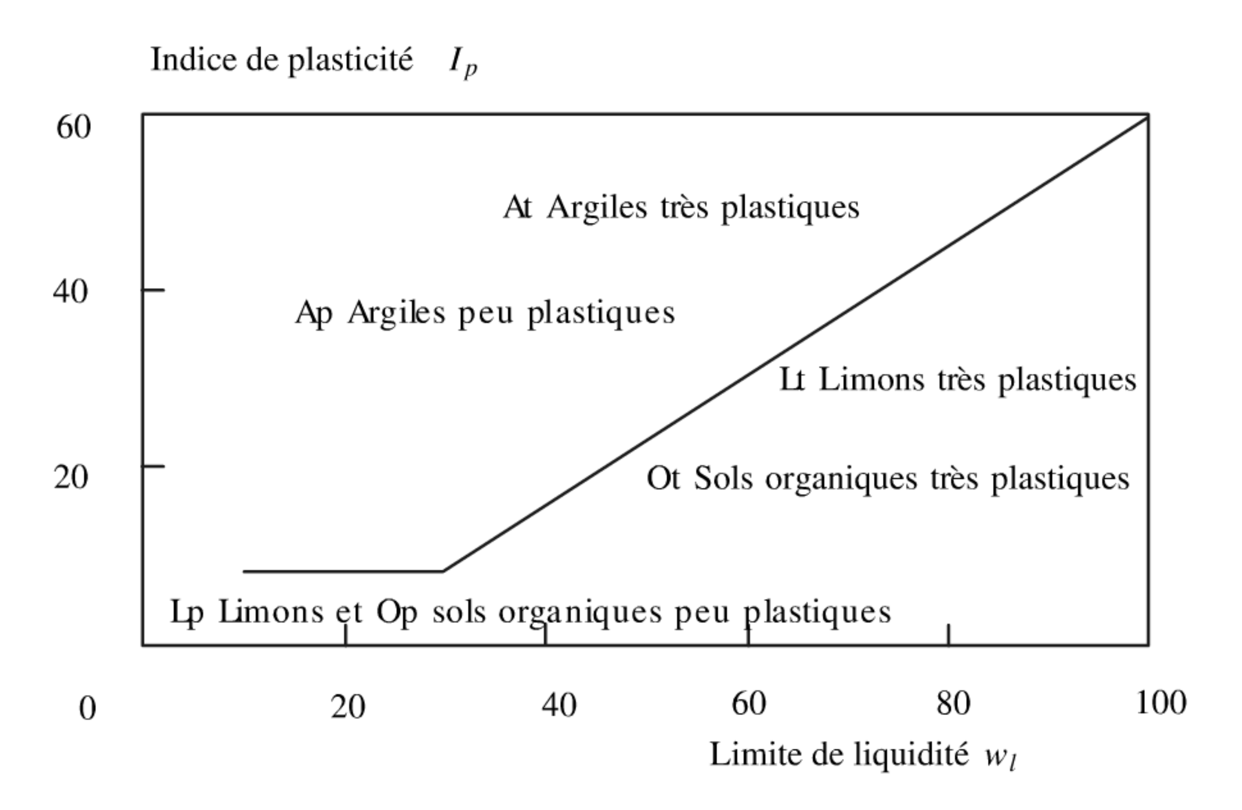


Figure 5.6 Abaque de plasticité de Casagrande (d'après Magnan [26]).

5.4 Classification LCPC des sols

Cette classification dérive de la classification américaine et a été adaptée aux normes françaises. Elle prend en compte les données de la granulométrie et celles de la plasticité. Une séparation est faite entre les sols grenus et les sols fins. On présente de manière synthétique ces classifications dans les figures 5.7 et 5.8.

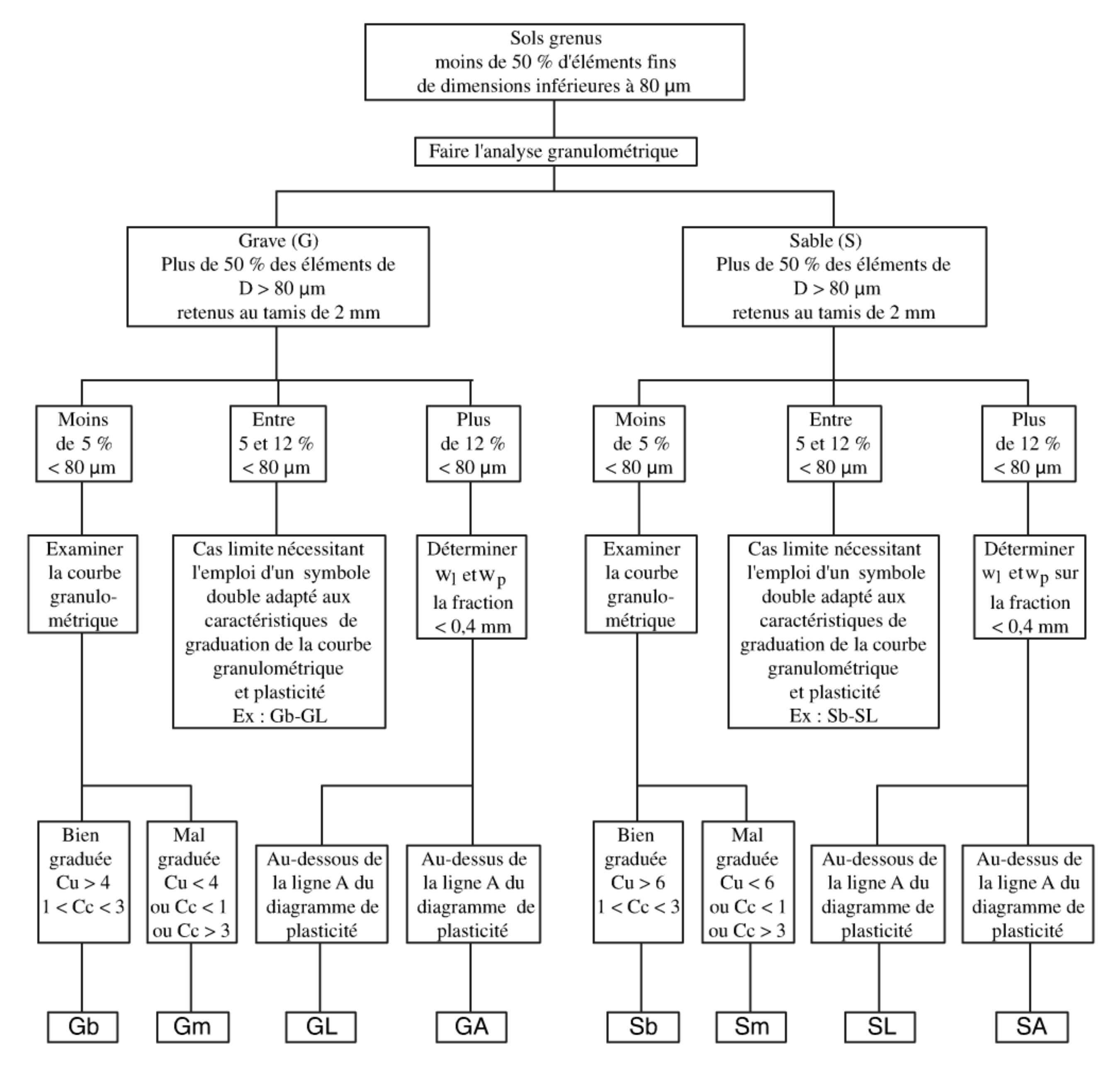


Figure 5.7 Classification des sols grenus.

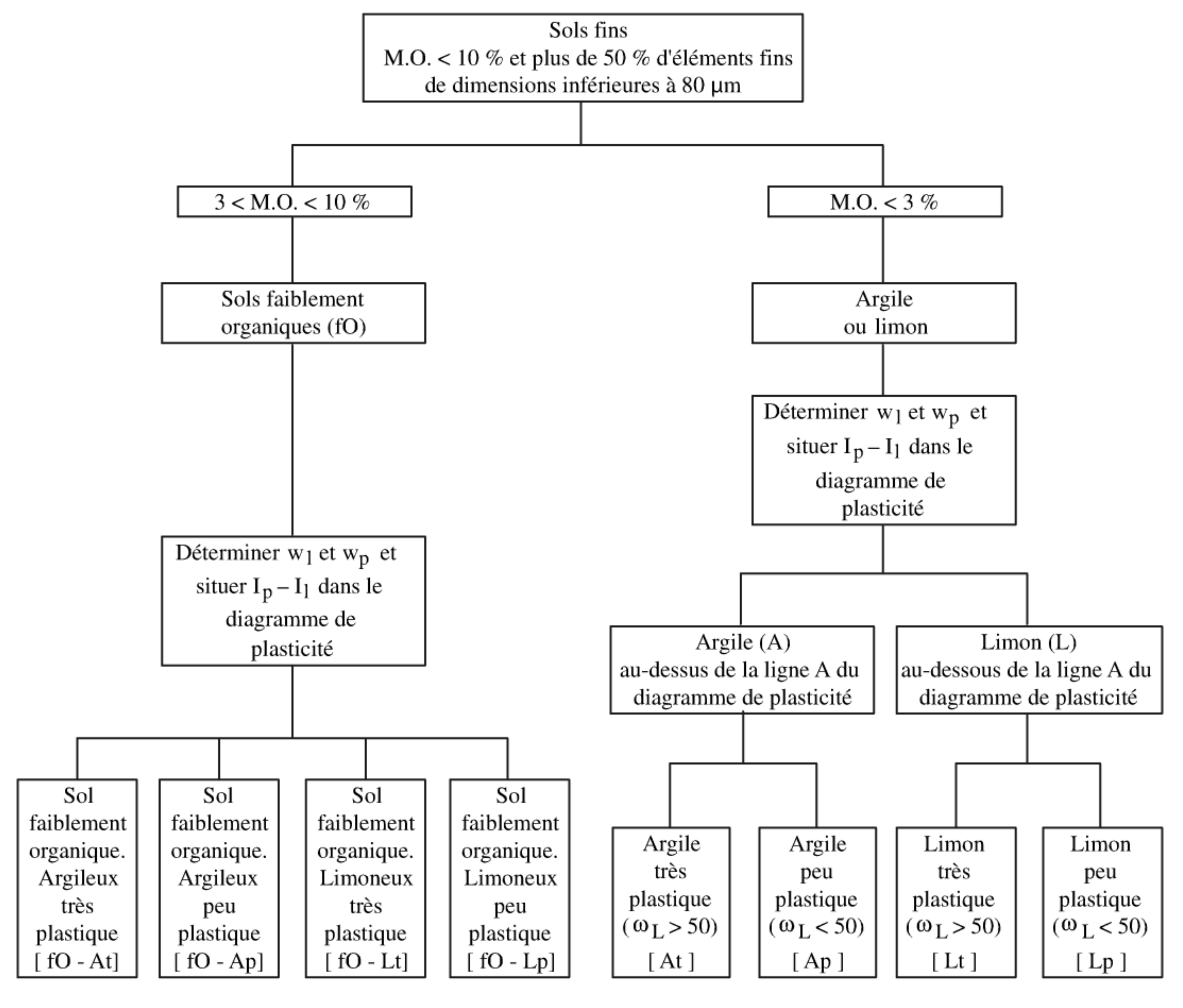


Figure 5.8 Classification des sols fins.

5.5 Exemples

On propose dans cette partie quelques exercices simples permettant d'assimiler les concepts exposés dans ce chapitre.

5.5.1 Détermination des caractéristiques d'un matériau

On prélève deux échantillons (1 et 2) sur une carotte de sol remanié . Le premier est utilisé pour faire une mesure de masse volumique sur par pesée. La masse de l'échantillon 1 avant paraffinage est égale à 1 287,4 g. Sa masse après paraffinage est de 1 352,9 g. La masse apparente de l'échantillon paraffiné plongé dans l'eau vaut 613,1 g.

L'échantillon 2 est utilisé pour effectuer une mesure de teneur en eau. Avant étuvage sa masse est de 85,83 g. Après étuvage à 110 °C, elle vaut 74,90 g.

Déduire de ces essais les valeurs de γ_h, ρ_d, w, w_{sat}, γ_{sat}, S_r, n, e et γ'. La densité des grains vaut 2,65. Celle de la paraffine vaut 0,9.

Correction. L'échantillon est plongé dans un liquide (eau) et une balance fournit le poids volumique déjaugé. Soit P_m le poids mesuré, P_p celui de la paraffine, V_e le volume de l'échantillon et V_p celui de la paraffine. On a :

$$P_m = P_p - \gamma_w(V_e + V_p).$$

Or :

$$V_p = \frac{P_p - P_e}{0{,}9\gamma_w} = 72{,}8\,\text{cm}^3.$$

On en déduit le volume de l'échantillon :

$$V_e = \frac{P_p - P_m}{\gamma_w} - V_p = 667\,\text{cm}^3.$$

Le poids volumique apparent est donc de :

$$\gamma_h = \frac{P_e}{V_e} = 19{,}3\,\text{kN.m}^{-3}.$$

On suppose que l'échantillon a été totalement séché donc :

$$w = \frac{M_w}{M_s} = 0,146.$$

Toutes les autres caractéristiques s'en déduisent. Les deux échantillons provenant du même sol sont supposés avoir les mêmes caractéristiques. Le volume de celui ayant subi l'étuvage est de :

$$V = \frac{P_h}{\gamma} = 44,47\,\text{cm}^3,$$

ce qui permet d'en déduire la masse volumique du sol sec :

$$\rho_d = M_d/V = 1,68\,\text{g.cm}^{-3}$$

Pour simplifier, on prend comme accélération de la pesanteur $g = 10$ m.s^{-2}. La teneur en eau saturée vaut w_{sat} = 0,22. La porosité est donnée par $n = 1 - \gamma_d/\gamma_w$ = 0,36 et e = 0,57. Enfin le degré de saturation vaut $S_R = w/w_{sat} = 0{,}67$ et $\gamma_{sat} = \gamma_d + n\gamma_w = 20{,}5$ kN.m^{-3}. Le poids volumique déjaugé est de $\gamma' = 10{,}5$ kN.m^{-3}.

5.5.2 Tassement sous un bâtiment et variation de l'indice des vides

Un bâtiment repose sur une couche d'argile saturée de 2,5 m d'épaisseur. Avant la construction de l'ouvrage, le poids volumique de l'argile saturée était de 19,5 kN.m^{-3}. Longtemps après la construction, à la suite de la consolidation (diffusion de l'eau), le poids volumique de l'argile est de 19,9 kN.m^{-3}. De combien le bâtiment s'est-il tassé ?

Réponse. On suppose que le sol ne se déforme que verticalement, ce qui signifie que la variation de volume n'est liée qu'au tassement. Soit H_i l'épaisseur de la couche avant construction et H_f après. On peut écrire :

$$P_d = \gamma_{d_i} H_i S = \gamma_{d_f} H_f S,$$

avec S la surface concernée. Le tassement est tel que :

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{H_f - H_i}{H_i} = 1 - \frac{\gamma_{d_i}}{\gamma_{d_f}}.$$

Le poids volumique apparent s'exprime par :

$$\gamma = \gamma_d(1 + w),$$

donc :

$$\frac{\Delta H}{H} = 1 - \frac{\gamma_i(1 + w_f)}{\gamma_f(1 + w_i)} = 0{,}038.$$

On en déduit le tassement pour la couche d'épaisseur 2,5 m qui vaut 9,6 cm.

5.5.3 Mélange de sable et d'argile

Quel pourcentage c d'argile (rapport de la masse sèche d'argile sur la masse sèche totale) faut-il ajouter dans un matériau granulaire sableux (sans fines) à l'état lâche ($e = 0{,}75$) pour combler les vides entre les grains de sable de façon à obtenir un matériau saturé tel que la teneur en eau totale soit égale à 0,2 ? On prendra une densité de l'argile et des grains de sable égale à 2,7.

Réponse. Soit le sol constitué du sable (sa) et de l'argile (ar). Il est tel que son poids vaut :

$$P = P^{ar} + P^{sa},$$

avec $P^{ar} = cP$ et $P^{sa} = (1 - c)P$.

Soit e^{sa} l'indice des vides du sable seul.

$$e^{sa} = \frac{V_v^{sa}}{V^{sa}}.$$

Le poids sec des grains est donné par définition par :

$$\gamma_s^{sa} = \frac{P_s^{sa}}{V_s^{sa}}.$$

On en déduit :

$$V_v^{sa} = \frac{e^{sa}(1 - c)P^{sa}}{\gamma_s^{sa}}.$$

Après mélange, le matériau devenant saturé avec $w = 0{,}2$, le volume des vides est comblé par l'argile et l'eau. On a :

$$V_v = V_w + V^{ar} = \frac{P_w}{\gamma_w} + \frac{P_d^{ar}}{\gamma_s^{ar}}.$$

On en déduit une deuxième relation pour le volume des vides :

$$V_v = w\frac{P_d}{\gamma_w} + c\frac{P_d}{\gamma_s^{ar}}.$$

On rapproche les deux expressions du volume des vides et on obtient :

$$c = \frac{e^{sa} - w(\gamma_d/\gamma_w)}{1 + e^{sa}} = 0{,}12.$$

5.5.4 Relation déformation volumique – indice des vides

Soit un matériau saturé, caractérisé à l'état initial par son indice des vides e_0 et à l'état final par e (ou par n_0 et n). Montrer que la variation relative de volume est donnée par :

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{v_s}\frac{1 - n_0}{1 - n} + \frac{n - n_0}{1 - n}.$$

En déduire que si le squelette est incompressible ($\epsilon_{v_s} = 0$) alors on a simplement :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{e - e_0}{1 + e_0}.$$

Cette relation est importante puisqu'elle explique qu'une variation d'indice des vides est reliée à la variation de déformation volumique. Elle justifie les tracés ultérieurs dans des graphes $(e, \log \sigma)$.

C

Éléments de mécanique des sols, vus comme des milieux continus

En dépit de sa nature granulaire ou particulaire à très petite échelle, un sol peut être considéré, à l'échelle de l'ingénieur, comme un milieu continu tridimensionnel. La présente partie a donc pour objectif de rappeler brièvement les notions essentielles de *Mécanique des Milieux Continus*, considérées comme des prérequis dont il sera fait abondamment usage par la suite dans la résolution des problèmes de géotechnique et les méthodes de calcul des ouvrages : déformations linéarisées, contraintes, équilibre, puissances virtuelles, problèmes d'élasticité, critère de résistance. Pour un exposé plus exhaustif de ces notions et de leur mise en œuvre, on pourra se reporter aux ouvrages classiques (Duvaut, 1990 [16] ; Germain et Muller, 1997 [18] ; Salençon, 2000 [39]).

6 Déformation d'un sol en tant que milieu continu

6.1 Généralités

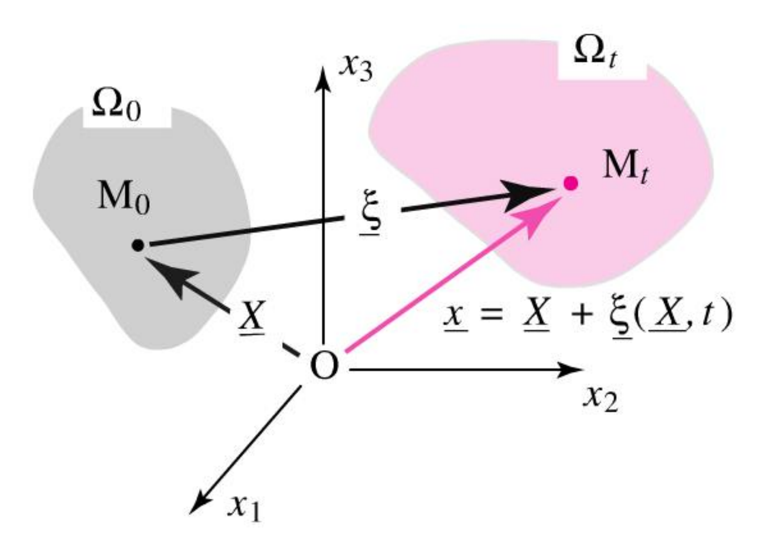


Figure 6.1 Déplacement d'un point matériel entre deux configurations.

Se plaçant dans le référentiel d'un observateur matérialisé par un repère cartésien *orthonormé* $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, on désigne par Ω_0 (resp. Ω_t) le domaine géométrique occupé par un milieu continu dans sa configuration *initiale à l'instant* $t = 0$ (resp. *actuelle à l'instant* t), ainsi que par $\underline{X} = \underline{OM}_0$ et $\underline{x} = \underline{OM}_t$, les vecteurs décrivant la position d'un point *matériel* quelconque dans ces mêmes configurations (Fig. 6.1).

On définit alors le vecteur *déplacement* de ce point entre ses deux configurations par :

$$\underline{\xi}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X}, \tag{6.1}$$

de sorte que le *gradient de la transformation* défini par :

$$\underline{dx} = \underline{\underline{F}} \,.\, \underline{dX}, \tag{6.2}$$

s'écrit encore :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\xi}. \tag{6.3}$$

6.2 Le cas de la transformation infinitésimale

En se plaçant dans *l'hypothèse de transformation infinitésimale* définie en tout point par la condition :

$$|\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\xi}| << 1 \;\leftrightarrow\; \forall(i,\,j)\;;\; \left|\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right| << 1, \tag{6.4}$$

le tenseur des *déformations linéarisées* s'écrit en tout point :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{X},t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\xi} + {}^{T}\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\xi}\right)(\underline{X},t), \tag{6.5}$$

soit en composantes dans le repère cartésien orthonormé :

$$\forall(i,\,j)\;;\;\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i}\right). \tag{6.6}$$

Ces déformations sont des *grandeurs sans dimension, petites devant l'unité* compte tenu de l'hypothèse de transformation infinitésimale (Éq. 6.4). En pratique, *on peut alors confondre les coordonnées initiales $\underline{X}$ et actuelles $\underline{x}$*, ainsi que les gradients par rapport à ces mêmes coordonnées, notés respectivement $\underline{\underline{\nabla}}(.)$ et $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}(.)$, et écrire :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi} + {}^{T}\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi}\right), \tag{6.7}$$

$$\forall(i,\,j)\;;\;\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i}\right) = \frac{1}{2}(\xi_{i,j} + \xi_{j,i}). \tag{6.8}$$

Il convient de noter que l'hypothèse de transformation infinitésimale, qui apporte une simplification considérable dans la résolution des problèmes de géotechnique, peut être remise en question lorsque les déplacements subis par l'ouvrage (tassement d'une fondation, convergence d'un tunnel...) sont d'une ampleur telle, qu'ils induisent des changements de géométrie de ce dernier.

6.3 Interprétation des composantes de la déformation

Compte tenu des définitions (6.5 ou 6.6), il est possible d'interpréter les composantes du tenseur des déformations linéarisées comme suit.

- Étant donné un vecteur matériel infinitésimal $\underline{\mathrm{d}M}_0$ de longueur $\mathrm{d}x_1 > 0$, parallèle à l'axe $\mathrm{O}x_1$ dans sa configuration initiale, et son transporté $\underline{\mathrm{d}M}_t$ dans sa configuration actuelle, on peut écrire (voir la figure 6.2) :

$$\left|\underline{\mathrm{d}M}_t\right| - \left|\underline{\mathrm{d}M}_0\right| \approx \mathrm{d}\xi_1 = \epsilon_{11}\mathrm{d}x_1 = \epsilon_{11}\left|\underline{\mathrm{d}M}_0\right|, \qquad (6.9)$$

de sorte que la déformation ϵ_{11} peut s'interpréter comme l'allongement (algébrique) relatif d'un vecteur matériel initialement parallèle à direction $\mathrm{O}x_1$.

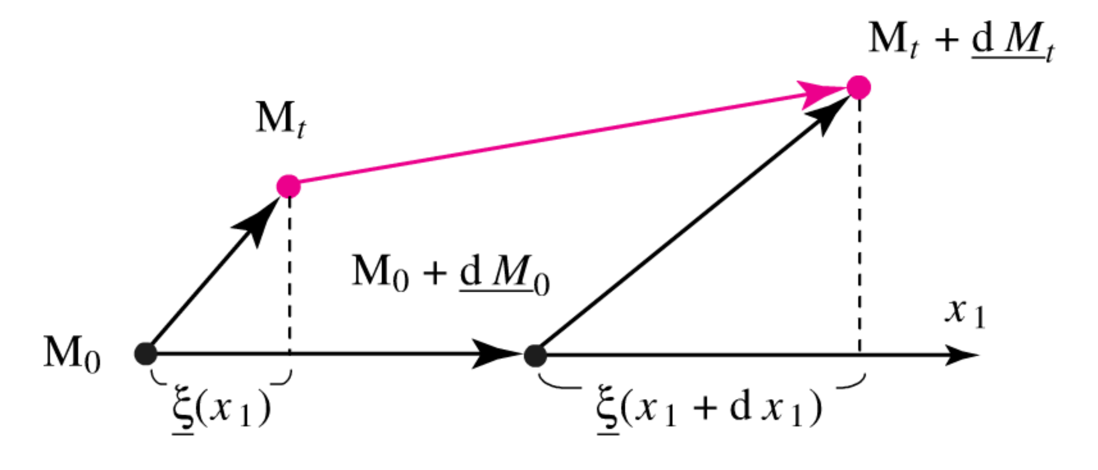


Figure 6.2 Interprétation de la déformation d'extension ϵ_{11}.

- De même, considérant un couple de vecteurs $(\underline{dM}_0 = dx_1\underline{e}_1, \underline{dM}'_0 = dx_2\underline{e}_2)$ portés par les axes Ox_1 et Ox_2, et leurs transportés dans la configuration actuelle $(\underline{dM}_t, \underline{dM}'_t)$, on peut écrire en vertu de 6.2, 6.3 et 6.5

$$\begin{aligned}\underline{dM}_t \cdot \underline{dM}'_t &= \underline{dM}_0 \left[(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\xi}) \cdot {}^T(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\xi}) \right] \underline{dM}'_0, \\ &\approx \underline{dM}_0 \cdot (\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{\epsilon}}) \cdot \underline{dM}_0 = 2\epsilon_{12} dx_1 dx_2,\end{aligned}$$

avec par ailleurs (Fig. 6.3) :

$$\underline{dM}_t \cdot \underline{dM}'_t = \sin\theta \left|\underline{dM}_t\right| \left|\underline{dM}'_t\right| \approx \theta dx_1 dx_2, \qquad (6.10)$$

de sorte que la *déformation de glissement* ϵ_{12} s'interprète comme la moitié de la variation d'angle θ entre deux directions orthogonales.

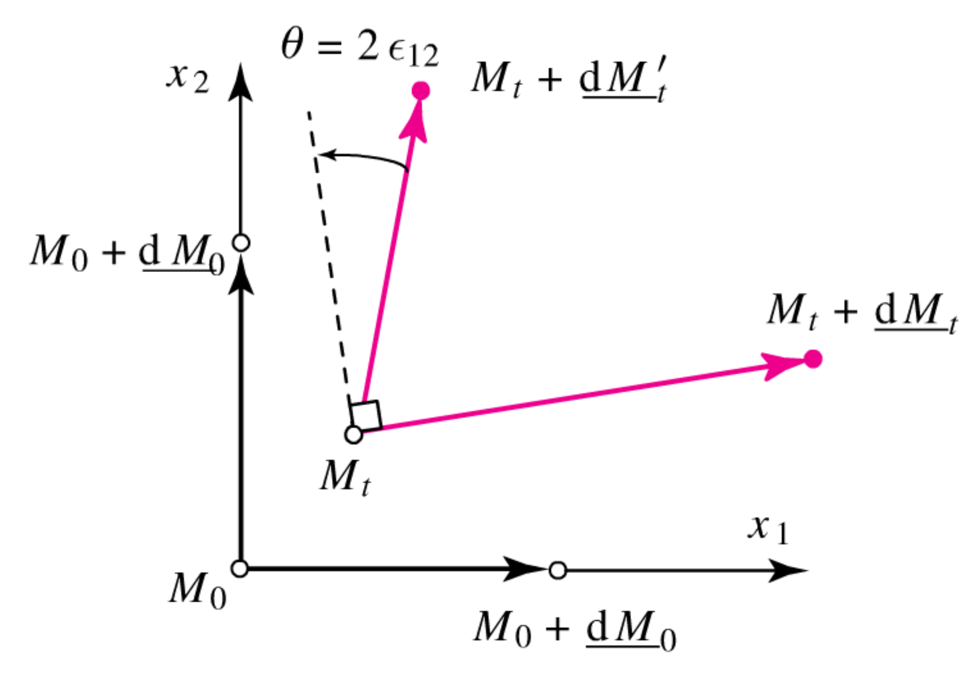


Figure 6.3 Interprétation de la déformation de glissement ϵ_{12}.

6.4 Variations de volume, porosité et indice des vides

Les *variations de volume* subies par le sol décrit comme un milieu continu sont décrites par la relation :

$$d\Omega_t = \det(\underline{\underline{F}})\, d\Omega_0, \tag{6.11}$$

où $d\Omega_0$ (resp. $d\Omega_t$) désigne un volume matériel élémentaire, tel que celui représenté sur la figure 6.4, dans sa configuration initiale (resp. actuelle).

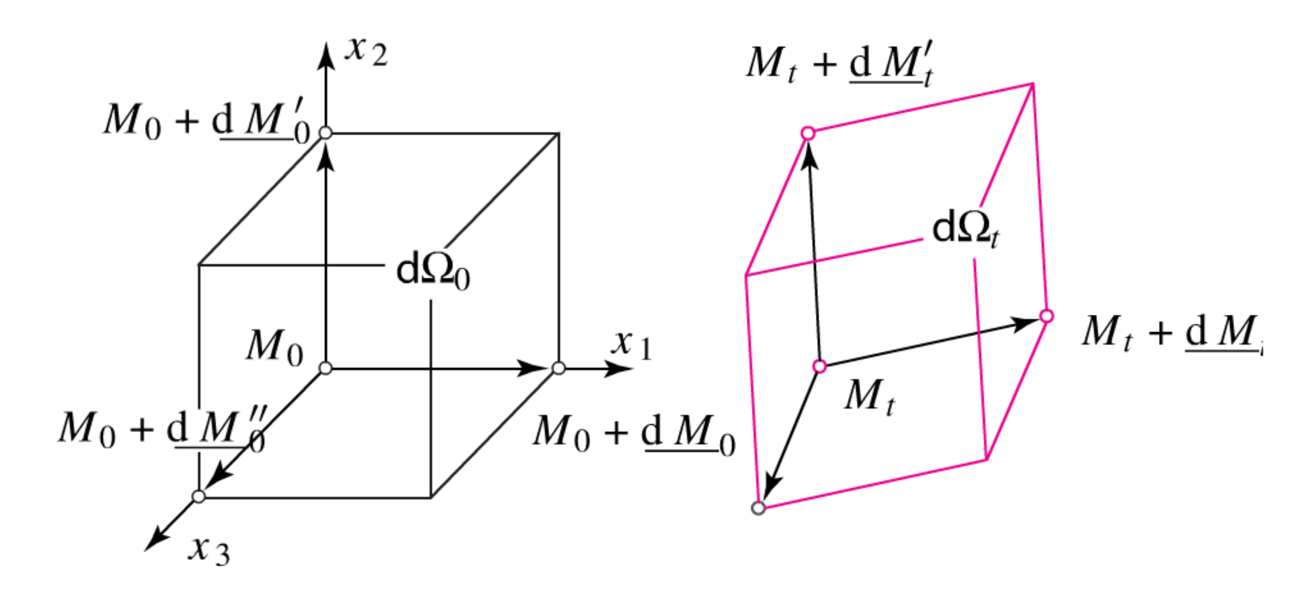


Figure 6.4 Variation de volume d'un cube élémentaire.

Dans le cas de la transformation infinitésimale, cette relation s'écrit :

$$d\Omega_t \approx (1 + \mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\epsilon}})\, d\Omega_0 \Rightarrow \mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \approx \frac{d\Omega_t - d\Omega_0}{d\Omega_0}. \tag{6.12}$$

La trace du tenseur des déformations linéarisées, appelée *déformation volumique* et notée ϵ_v, est donc égale à la variation relative de volume du sol. Celui-ci étant un milieu poreux, c'est-à-dire constitué d'un assemblage de grains ou particules solides, et d'un espace poreux, qui peut être saturé ou non d'un ou plusieurs fluides, on note n_0 et n_t les porosités initiale et actuelle définies par (Fig. 6.5) :

$$n_0 = \frac{d\Omega_0 - d\Omega_0^s}{d\Omega_0} \quad , \quad n_t = \frac{d\Omega_t - d\Omega_t^s}{d\Omega_t}, \tag{6.13}$$

ainsi que les *indices des vides* (notés e_0 et e_t), utilisés plus classiquement en mécanique des sols, qui sont les rapports entre les volumes de l'espace poreux et du solide :

$$e_0 = \frac{d\Omega_0 - d\Omega_0^s}{d\Omega_0^s} = \frac{n_0}{1 - n_0} \quad , \quad e_t = \frac{n_t}{1 - n_t}. \tag{6.14}$$

Figure 6.5 Porosités et indices des vides d'un sol.

En introduisant alors la déformation volumique de la phase solide, définie par :

$$\epsilon_v^s = \frac{d\Omega_t^s - d\Omega_0^s}{d\Omega_0^s}, \tag{6.15}$$

il vient :

$$\epsilon_v = \frac{d\Omega_t - d\Omega_0}{d\Omega_0^s} = \frac{d\Omega_t^s(1 + e_t)}{d\Omega_0^s(1 + e_0)} - 1 = (1 + \epsilon_v^s)\frac{1 + e_t}{1 + e_0} - 1. \tag{6.16}$$

Dans l'hypothèse où le solide constituant les grains est *incompressible*, c'est-à-dire sa déformation volumique est nulle, la déformation volumique du sol est directement proportionnelle à la variation de l'indice des vides :

$$\epsilon_v = \frac{e_t - e_0}{1 + e_0}. \tag{6.17}$$

Dans le cas d'une transformation *quelconque*, c'est-à-dire notamment si les variations de l'indice des vides ne sont pas infinitésimales, cette dernière relation devient :

$$\det \underline{\underline{F}} = \frac{d\Omega_t}{d\Omega_0} = \frac{1 + e_t}{1 + e_0}. \tag{6.18}$$

6.5 Description par les vitesses

On définit la *vitesse* à l'instant t d'un point matériel comme la dérivée par rapport au temps du déplacement de ce point :

$$\underline{U}(\underline{X},t) = \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial t}(\underline{X},t) = \underline{\dot{\xi}}(\underline{X},t), \tag{6.19}$$

soit en tenant compte de l'hypothèse de *transformation infinitésimale* :

$$\underline{U}(\underline{X},t) = \underline{\dot{\xi}}(\underline{x},t). \tag{6.20}$$

Le *tenseur des taux de déformation* s'écrit :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{U} + {}^{T}\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{U}\right](\underline{x},t) = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\underline{x},t), \tag{6.21}$$

ou encore en composantes :

$$\forall(i,\,j)\;;\; d_{ij} = \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(U_{i,j} + U_{j,i}\right). \tag{6.22}$$

On introduit également la partie antisymétrique du gradient du champ de vitesse, dénommée *taux de rotation*, qui est un tenseur antisymétrique :

$$\forall(i,\,j)\;;\; \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(U_{i,j} - U_{j,i}\right). \tag{6.23}$$

Enfin, le « taux de déformation volumique » s'écrit :

$$\dot{\epsilon}_v = \text{Tr}\,\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \text{Tr}\,\underline{\underline{d}} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \text{div}\,\underline{U}, \tag{6.24}$$

(avec la convention de sommation sur les indices muets répétés) qui dans le cas d'un solide incompressible est relié au taux de variation de l'indice des vides par :

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{\dot{e}_t}{1+e_0}. \tag{6.25}$$

6.6 Exemples

6.6.1 Mouvement de rotation plan

Un tel mouvement décrit sur la figure 6.6 est défini en coordonnées cylindriques par un champ de déplacement de la forme :

$$\underline{\xi} = \alpha(t)\, r \underline{e}_\theta, \tag{6.26}$$

où l'angle de rotation α reste petit de façon à satisfaire l'hypothèse de *transformation infinitésimale*. Le calcul du gradient de ce champ donne :

$$\begin{aligned} d\underline{\xi} &= \alpha\,(\underline{e}_\theta\, dr - r d\theta \underline{e}_r) = \alpha\left[\underline{e}_\theta\,(\underline{e}_r \,.\, d\underline{x}) - \underline{e}_r\,(\underline{e}_\theta \,.\, d\underline{x})\right] \\ &= \alpha(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta) \,.\, d\underline{x} \\ &\quad \Rightarrow \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{\xi} = \alpha(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta). \end{aligned} \tag{6.27}$$

Remarque

$\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ représente le tenseur dont les termes de la matrice représentative valent 0, sauf celui situé sur la ligne i et la colonne j qui vaut 1.

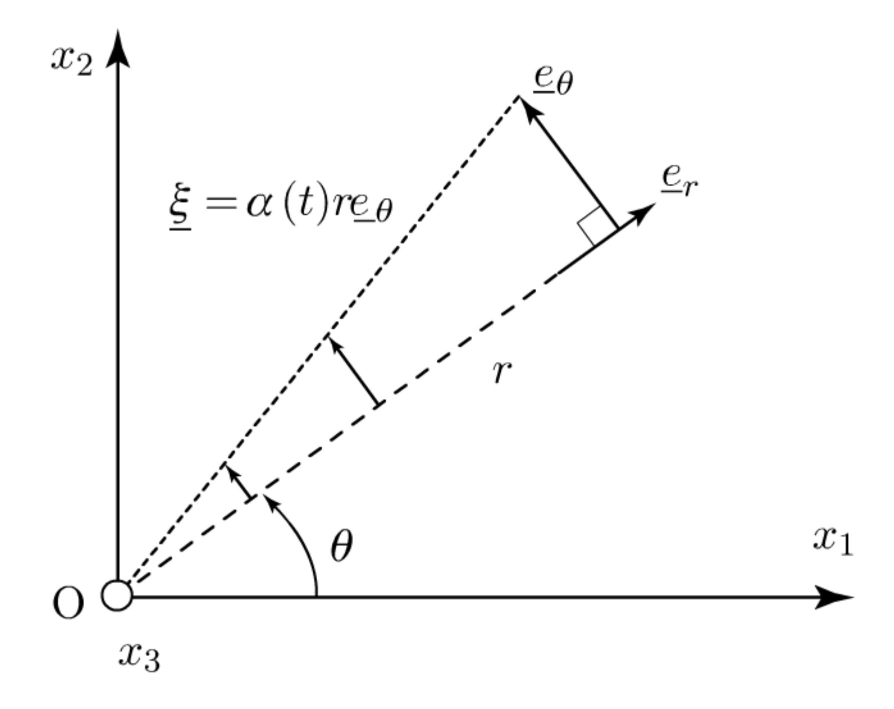


Figure 6.6 Mouvement de rotation infinitésimale autour de l'axe (O, x_3).

Le *champ des déformations* est donc nul :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi} + {}^{T}\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{\xi}\right) = \underline{\underline{0}}. \qquad (6.28)$$

On obtient de même pour les *vitesses* :

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{\xi}}(\underline{x}, t)\,\alpha = \dot{\alpha}(t)\,r\,\underline{e}_{\theta}, \qquad (6.29)$$

où $\dot{\alpha}$ est *la vitesse de rotation*, et donc :

$$\underline{\underline{d}} = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\dot{\underline{\xi}} + {}^{T}\underline{\underline{\text{grad}}}\,\dot{\underline{\xi}}\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{U} + {}^{T}\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{U}\right) = \underline{\underline{0}}, \quad (6.30)$$

tandis que le taux de rotation s'écrit :

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{U} - {}^{T}\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{U}\right) = \dot{\alpha}\,(\underline{e}_{\theta} \otimes \underline{e}_{r} - \underline{e}_{r} \otimes \underline{e}_{\theta}). \qquad (6.31)$$

6.6.2 Mouvement de glissement simple

Le champ de déplacement s'écrit pour un tel mouvement (Fig. 6.7) :

$$\underline{\xi}(\underline{x}, t) = 2\gamma(t)x_2\underline{e}_1, \qquad (6.32)$$

d'où :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \gamma(t)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \Rightarrow \underline{\underline{d}} = \dot{\gamma}(t)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1). \quad (6.33)$$

Les *valeurs principales* de la déformation dans le plan $O\,x_1\,x_2$ sont $+\gamma$ et $-\gamma$ associées respectivement aux deux bissectrices du repère, la troisième direction Ox_3 étant associée à une déformation nulle (*déformation plane*). Les résultats sont similaires pour le *taux de déformation*.

Il convient par ailleurs de remarquer que le mouvement de glissement simple est *isochore*, c'est-à-dire que les déformations se produisent à *volume constant*, puisque la *déformation volumique* en tout point est nulle :

$$\text{Tr}\,\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_{ii} = \xi_{i,i} = \text{div}\,\underline{\xi} = 0, \qquad (6.34)$$

la condition étant identique pour le *taux de déformation volumique* :

$$\text{Tr}\ \underline{\underline{d}} = d_{ii} = U_{i,i} = \text{div}\ \underline{U} = 0. \tag{6.35}$$

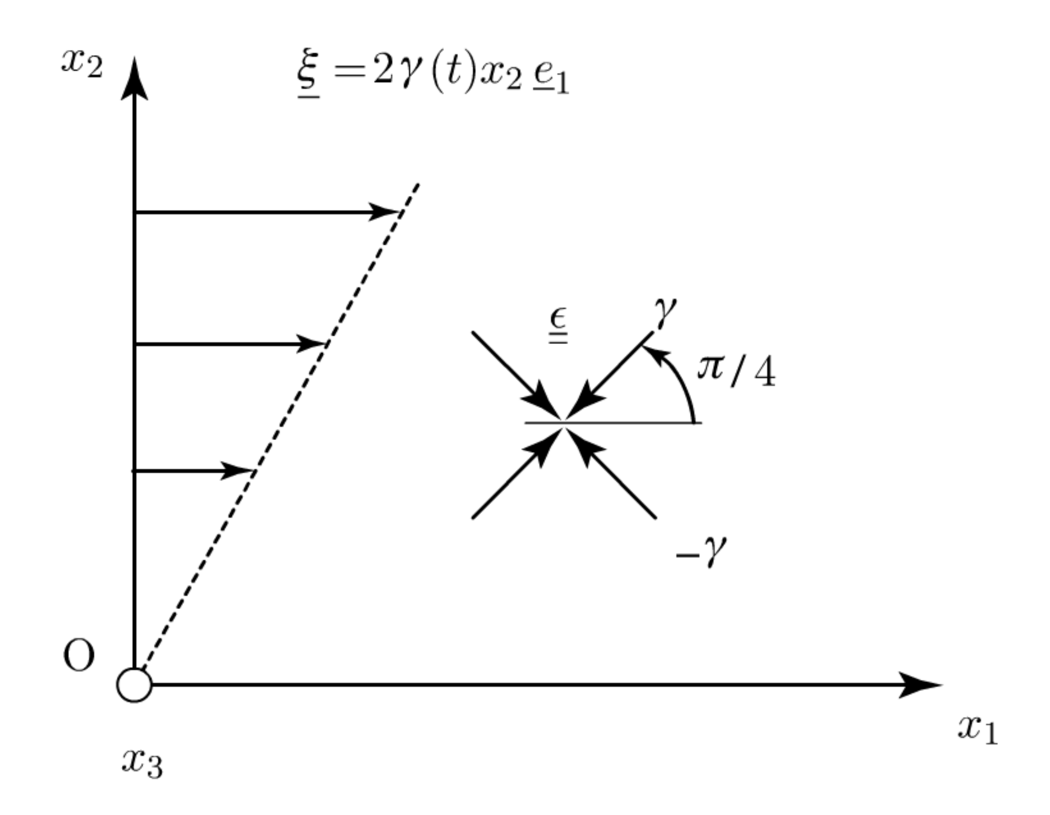


Figure 6.7 Mouvement de glissement simple en transformation infinitésimale.

7 Contraintes dans un sol

7.1 Tenseur des contraintes de Cauchy

Les contraintes dans un sol modélisé comme un milieu continu, sont définies sur la *configuration actuelle* de ce milieu par un champ de *tenseurs symétriques du second ordre*, noté $\underline{\underline{\sigma}}$ (contraintes de Cauchy) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \tag{7.1}$$

avec $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Le vecteur-contrainte agissant sur un facette matérielle de ce milieu de normale unitaire $\underline{n}$ s'écrit :

$$\underline{T}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} . \underline{n} = \sigma_{ij} n_j \underline{e}_i. \tag{7.2}$$

σ_{ij} peut donc s'interpréter comme la i^e composante du vecteur contrainte agissant sur la facette de normale $\underline{e}_j$:

$$\underline{e}_i . \underline{T}(\underline{e}_j) = \underline{e}_i . \underline{\underline{\sigma}} . \underline{e}_j = \sigma_{ij}. \tag{7.3}$$

Le vecteur-contrainte sur une facette quelconque peut se décomposer en une *contrainte normale* σ (positive en traction) et une *contrainte tangentielle* τ à la facette (Fig. 7.1) :

$$\underline{T}(\underline{n}) = \sigma \underline{n} + \underline{\tau} \quad \text{avec} \quad \underline{\tau} . \underline{n} = 0. \tag{7.4}$$

Compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes, il existe trois directions *perpendiculaires* de vecteurs unitaires $\underline{n}_k, k = 1, 2, 3$, pour lesquelles la contrainte tangentielle sur les facettes correspondantes s'annulent :

$$k = 1, 2, 3 \quad \underline{T}(\underline{n}_k) = \underline{\underline{\sigma}} \,.\, \underline{n}_k = \sigma_k \underline{n}_k. \qquad (7.5)$$

Dans cette équation il n'y a pas de sommation sur les indices.

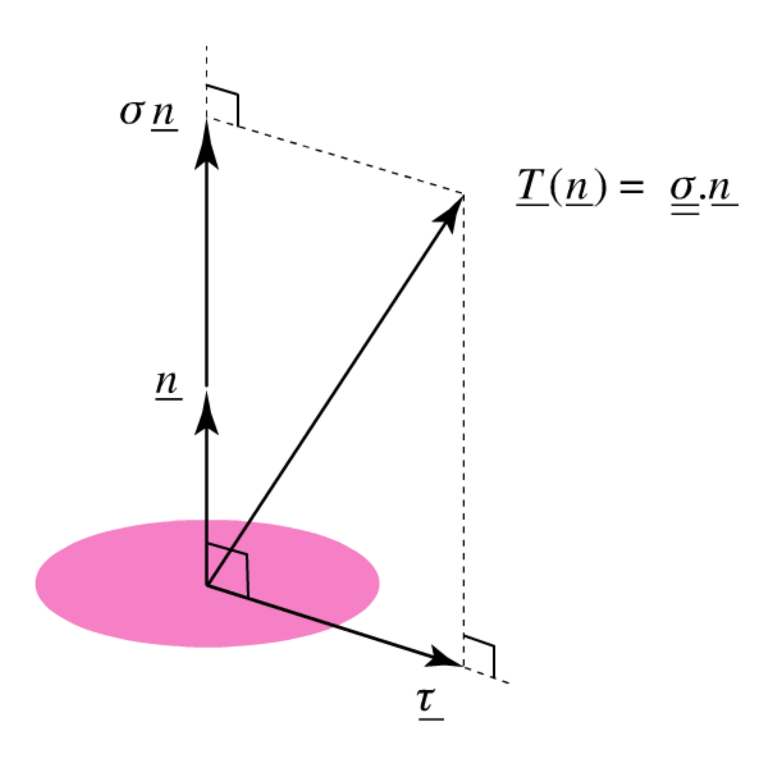


Figure 7.1 Contraintes normale et tangentielle sur une facette.

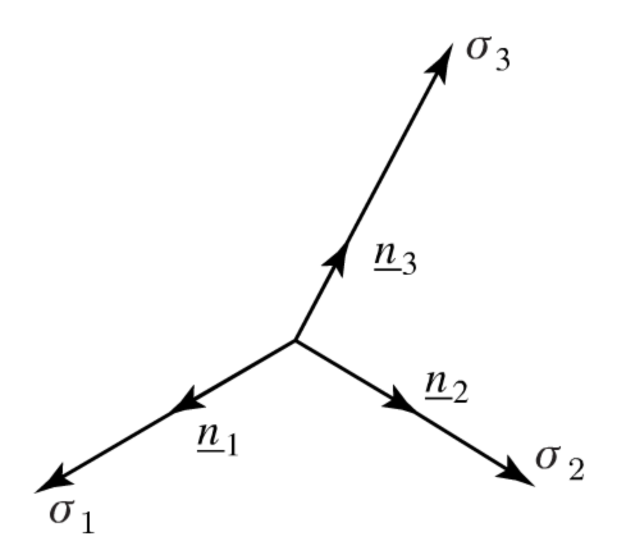


Figure 7.2 Trièdre des directions principales et contraintes principales associées.

On peut écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \underline{n}_1 \otimes \underline{n}_1 + \sigma_2 \underline{n}_2 \otimes \underline{n}_2 + \sigma_3 \underline{n}_3 \otimes \underline{n}_3, \qquad (7.6)$$

σ_k désignant la *contrainte principale* correspondant à la *direction principale* associée à $\underline{n}_k$ (Fig. 7.2).

Un état de contrainte en un point donné du sol peut donc être représenté soit par les six composantes indépendantes de sa matrice représentative dans un repère orthonormé quelconque :

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}\right] = \left[\sigma_{ij}\right], \qquad (7.7)$$

soit par les trois contraintes principales et les trois angles définissant l'orientation du trièdre des directions principales de la contrainte par rapport à un trièdre fixe.

Le tenseur des contraintes peut être décomposé comme suit en parties *sphérique* et *déviatorique* :

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \text{ soit } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{s}} + \frac{1}{3}(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}, \qquad (7.8)$$

où $\underline{\underline{s}}$ désigne le *déviateur de contrainte*, qui est de trace nulle, et $\underline{\underline{1}}$ est le tenseur identité.

Remarque

La convention de signe adoptée ici pour les contraintes est celle de la Mécanique des Milieux Continus (MMC), qui stipule qu'elles sont comptées *positivement* en traction. En Mécanique des Sols (MS), l'usage est au contraire de compter positives les contraintes de *compression*. Sauf mention explicite du contraire, qui sera signalée par le sigle MS, nous adopterons ici par la suite la convention de la MMC.

7.2 Représentation de Mohr des contraintes

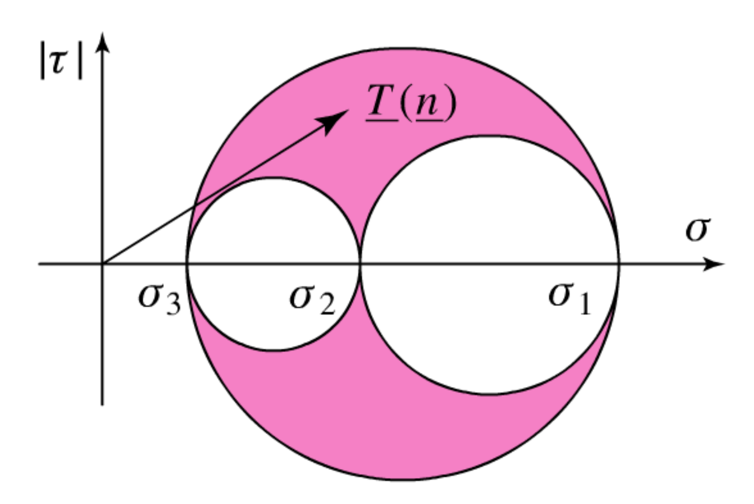


Figure 7.3 Représentation d'un état de contrainte dans le plan de Mohr : cas général.

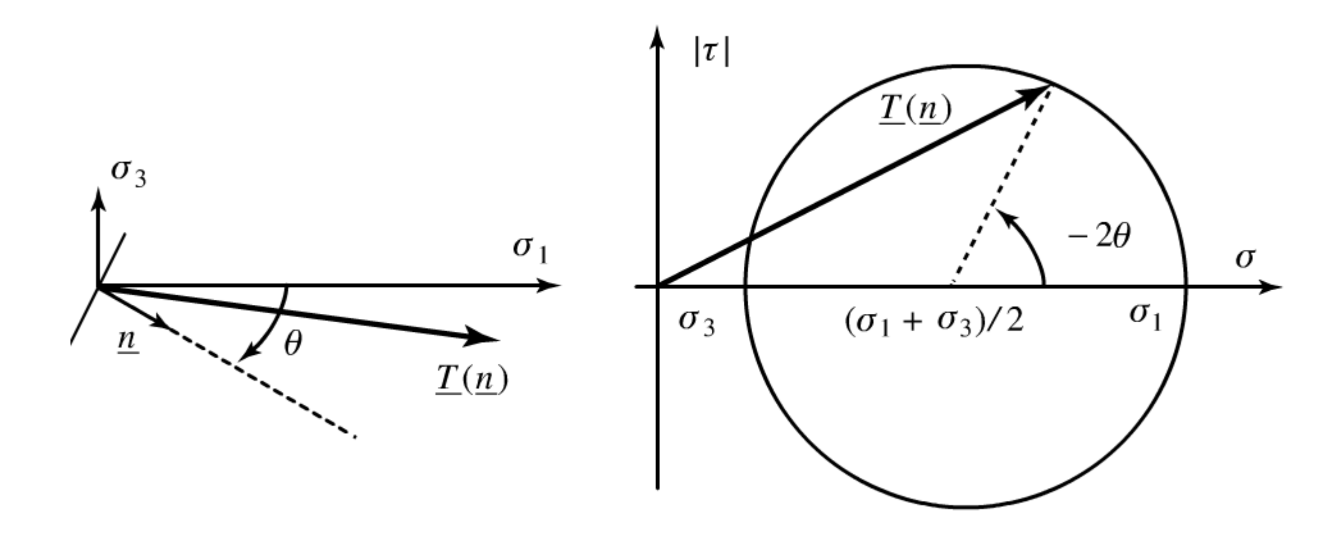


Figure 7.4 Représentation de Mohr dans le cas où la normale à la facette est située dans le plan des contraintes principales extrêmes.

La représentation d'un état de contrainte dans le *plan de Mohr* est illustrée sur la figure 7.3. Étant donné un tel état de contrainte dont les

valeurs principales sont telles que $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, le vecteur-contrainte agissant sur une facette quelconque est tel que son extrémité parcourt le domaine compris entre le « grand » cercle de Mohr de diamètre $\sigma_1 - \sigma_3$ et les deux « petits » cercles de diamètres $\sigma_1 - \sigma_2$ et $\sigma_2 - \sigma_3$, ces cercles étant tous centrés sur l'axe des contraintes normales σ, quand l'orientation de la facette varie. Le cas particulier où la normale à cette facette est située dans le plan des contraintes principales extrêmes (σ_1, σ_3), inclinée d'un angle θ par rapport à la direction de la contrainte principale majeure σ_1, est représenté sur la figure 7.4. Il ressort de cette dernière figure, que l'extrémité du vecteur contrainte tourne d'un angle -2θ sur le grand cercle de Mohr lorsque la facette tourne d'un angle θ dans la plan des contraintes principales extrêmes.

7.3 Quelques états de contrainte remarquables

7.3.1 État de contrainte uniaxial

Cet état de contrainte est défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \text{ ou } \left[\underline{\underline{\sigma}}\right] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.9}$$

sa représentation de Mohr étant donnée sur la figure 7.5. Cet état est recherché dans un essai mécanique de traction ou de compression simple.

7.3.2 État de contrainte hydrostatique

C'est par exemple celui qui règne en tout point d'un fluide au repos. Il est défini par un tenseur *isotrope* :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} \text{ ou } [\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}. \tag{7.10}$$

les trois cercles de Mohr étant alors réduits à un seul point (Fig. 7.6).

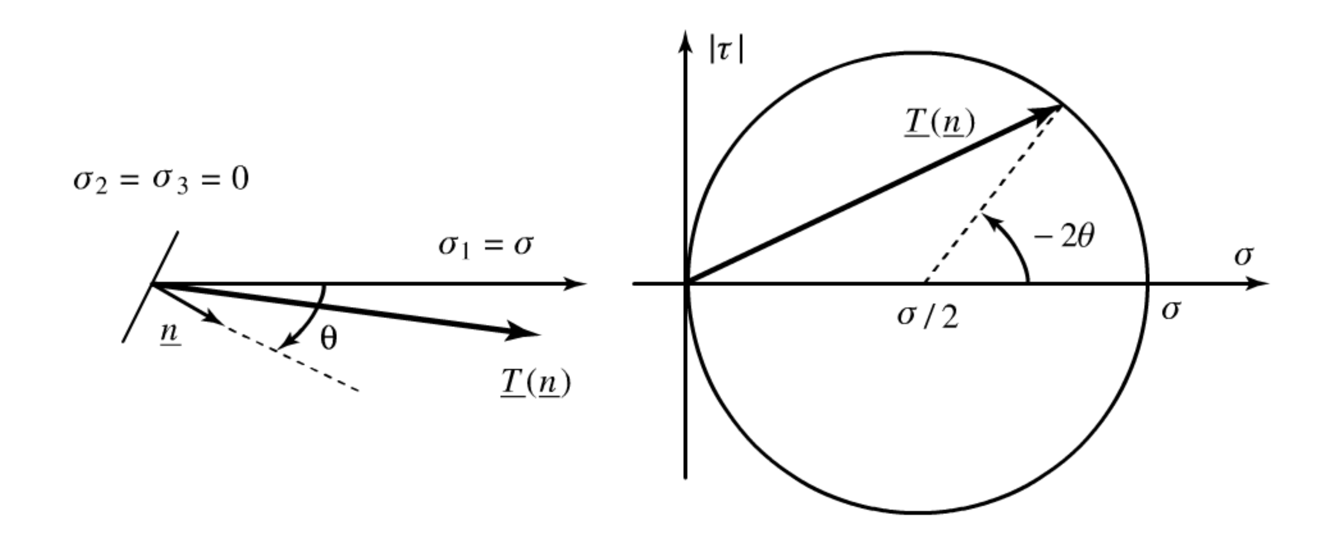


Figure 7.5 Représentation de Mohr d'un état de contrainte uniaxiale de traction ($\sigma > 0$).

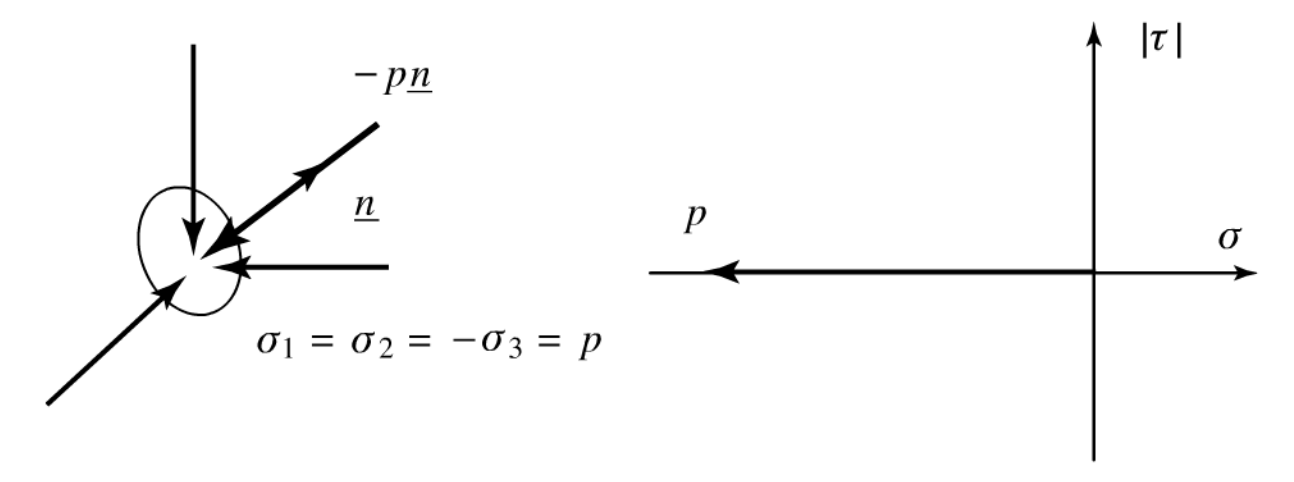


Figure 7.6 Représentation de Mohr d'un état de contrainte hydrostatique de compression ($p > 0$).

7.3.3 État de contrainte « triaxial de révolution »

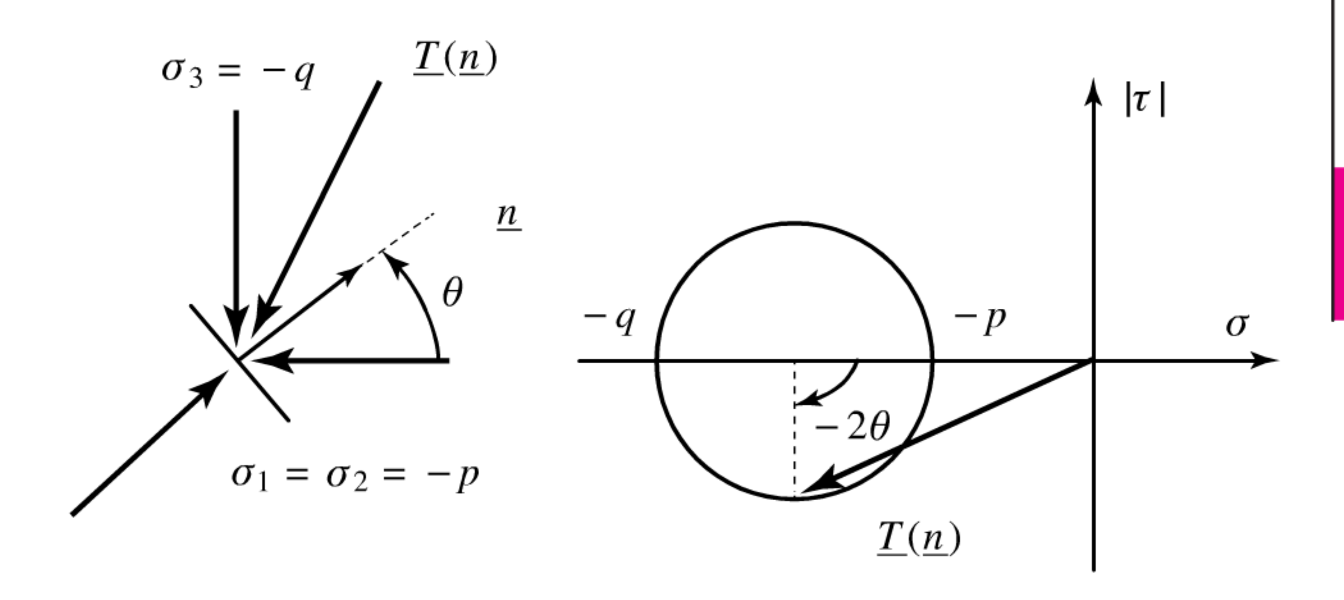


Figure 7.7 Représentation de Mohr d'un état de contrainte triaxial de révolution ($q > p > 0$).

Un tel état de contrainte est rencontré dans un essai de compression verticale avec confinement latéral sur une éprouvette cylindrique de sol (essai « triaxial »)

$$\underline{\underline{\sigma}} = -q\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 - p(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \text{ ou } \left[\underline{\underline{\sigma}}\right] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -q \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

7.3.4 État de contrainte de cisaillement pur

C'est par exemple l'état de contrainte qu'il est possible de créer dans un essai à la boîte de cisaillement. Il est défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \text{ ou } \left[\underline{\underline{\sigma}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.12)$$

sa représentation dans le plan de Mohr étant donnée sur la figure 7.8.

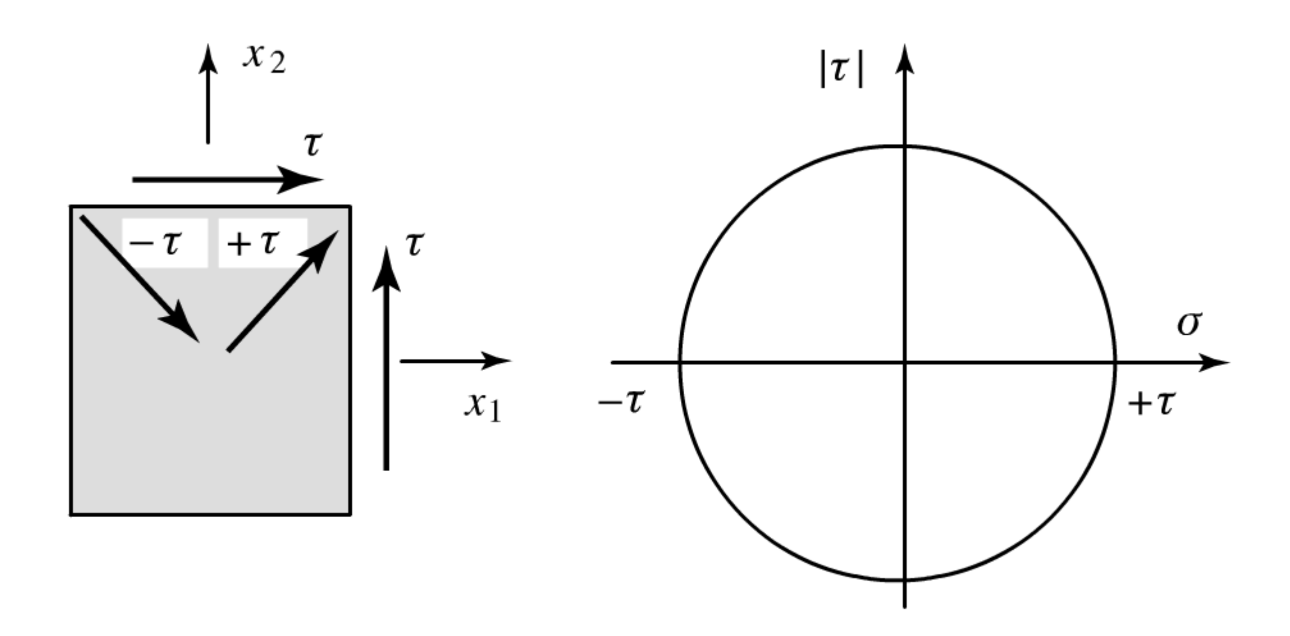


Figure 7.8 Représentation de Mohr d'un état de contrainte de cisaillement pur.

7.4 Équilibre ; champs de contrainte statiquement admissibles

Lorsque le champ de contrainte de Cauchy est continûment différentiable par rapport aux coordonnées d'espace, les équations d'équilibre s'écrivent dans le cas de la statique (c'est-à-dire en négligeant les forces d'inertie) en coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0, \tag{7.13}$$

soit en notation intrinsèque :

$$\underline{\operatorname{div}}\ \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{F} = \underline{0}, \tag{7.14}$$

où $\rho \underline{F}$ désigne la *densité volumique d'efforts extérieurs* à distance, telle que poids spécifique du sol, où bien encore les efforts associés à un écoulement hydraulique.

Cette équation d'équilibre doit être complétée par l'*équation aux discontinuités*, valable dans le cas où le champ de contrainte est *discontinu* au travers d'une surface, qui s'écrit :

$$(\underline{\underline{\sigma}}^+ - \underline{\underline{\sigma}}^-) \,.\, \underline{n} = \left[\, \underline{\underline{\sigma}} \,\right] .\, \underline{n} = \underline{0}. \qquad (7.15)$$

où $\left[\, \underline{\underline{\sigma}} \,\right] = \underline{\underline{\sigma}}^+ - \underline{\underline{\sigma}}^-$ représente la *discontinuité de contrainte* au franchissement le la surface de discontinuité Σ_σ en suivant la normale $\underline{n}$ à cette surface (Fig. 7.9). En d'autres termes, la condition 7.15 exprime la *continuité du vecteur-contrainte* à la traversée de cette surface.

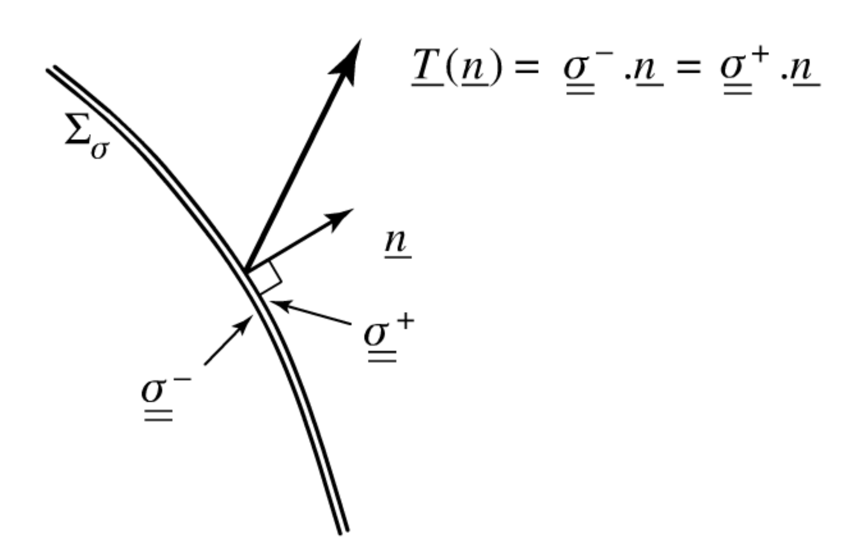


Figure 7.9 Condition de saut à la traversée d'une surface de discontinuité d'un champ de contrainte.

Un champ de contrainte est alors dit *statiquement admissible* (S.A.) s'il vérifie :

- *l'équation d'équilibre* 7.13 avec des forces de volume *données* $\underline{F} = \underline{F}^d$ en tout point où il est continûment différentiable ;
- *l'équation aux discontinuités* 7.15 à la traversée des surfaces de discontinuité Σ_σ de ce champ ;
- *les conditions aux limites en contraintes*, qui peuvent être définies comme suit :

$$T_i(\underline{x}) = \sigma_{ij}(\underline{x})\, n_j(\underline{x}) = T_i^d(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_{T_i}, \tag{7.16}$$

où S_{T_i} désigne la partie de la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω occupé par le massif de sol sur laquelle la i^e composante T_i du vecteur-contrainte agissant en tout point de cette frontière est donnée.

Quelques exemples couramment rencontrés de telles conditions aux limites en contrainte sont décrits ci-après.

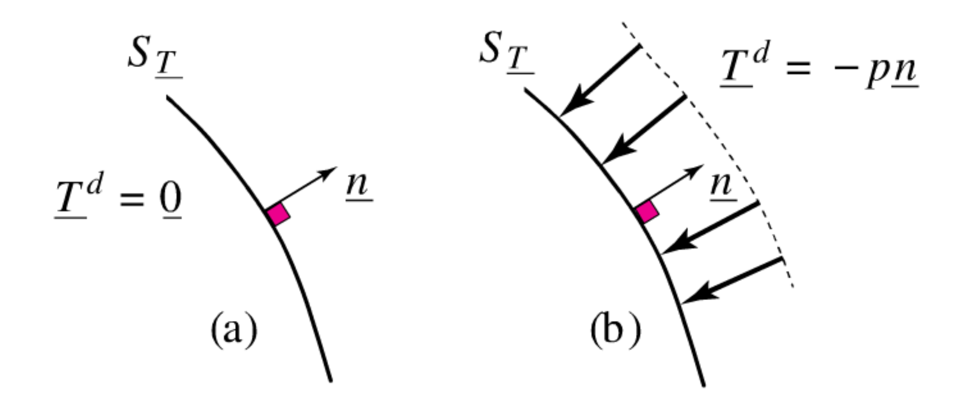


Figure 7.10 (a) : surface libre de contrainte ;
(b) : surface soumise à une pression uniforme.

- *Surface libre de contrainte* (Fig. 7.10a) : nullité du *vecteur-contrainte* (mais pas du tenseur des contraintes !) :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}(\underline{n}) = \underline{T}^d = \underline{0}. \tag{7.17}$$

- *Surface soumise à une pression uniforme p* (Fig. 7.10b) :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}(\underline{n}) = \underline{T}^d = -p\underline{n} \quad , \quad p \geqslant 0. \tag{7.18}$$

- *Surface en contact sans frottement avec une paroi* (Fig. 7.11a). La condition aux limites en contrainte consiste à écrire que la contrainte tangentielle est nulle, la contrainte normale étant indéterminée :

$$\underline{T}(\underline{n}) - \sigma\underline{n} = \underline{\tau}^d = \underline{0}. \tag{7.19}$$

- Surface en contact parfaitement adhérent avec une paroi : encastrement (Fig. 7.11b). Il n'y a aucune condition portant sur le vecteur-contrainte, qui reste arbitraire.

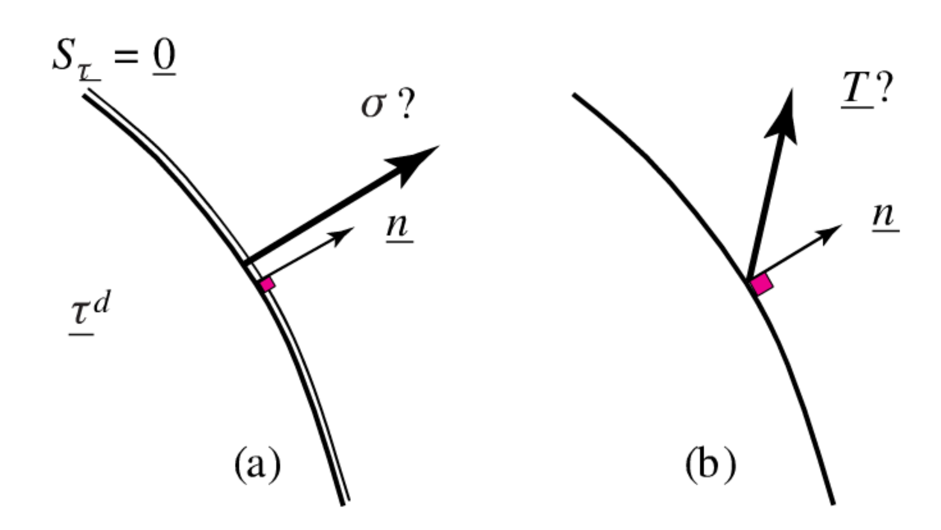


Figure 7.11 (a) : contact sans frottement ; (b) : encastrement.

7.5 Principe des Puissances Virtuelles (PPV)

On désigne par $\underline{\hat{U}}$ un champ de vecteurs quelconque défini sur la configuration actuelle du sol, appelé *champ de vitesses virtuelles* (le ˆ rappelle le caractère virtuel d'un tel champ). Il est essentiel de préciser qu'un tel champ vectoriel n'est *a priori* astreint à aucune des limitations imposées aux mouvements réels et aux champs de vitesses associées (liaisons, condition d'incompressibilité, etc.). Il peut en particulier comporter des *surfaces de discontinuité*, notées Σ_U (Fig. 7.12).

On montre alors – par simple application du théorème de la divergence – que pour tout champ de vitesse virtuel $\underline{\hat{U}}$ et tout champ de contrainte vérifiant l'équation d'équilibre 7.13 et l'équation aux discontinuités 7.15, la *puissance virtuelle des efforts extérieurs* appliqués au massif occupant le domaine Ω, définie par :



$$P_e(\underline{\hat{U}}) = \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \, . \, \underline{n}) \, . \, \underline{\hat{U}} \mathrm{d}S + \int_{\Omega} \rho \underline{F} \, . \, \underline{\hat{U}} \, \mathrm{d}\Omega, \tag{7.20}$$

est égale à la *puissance virtuelle de déformation* (on néglige la puissance des quantités d'accélération), dont l'expression est donnée par :

$$P_d(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{d}}}) \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \, . \, \underline{n}) \, . \, \left[\underline{\hat{U}}\right] \mathrm{d}\Sigma, \tag{7.21}$$

où $\underline{\underline{\hat{d}}}$ est le *taux de déformation virtuel* :

$$\underline{\underline{\hat{d}}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\mathrm{grad}}} \, \underline{\hat{U}} + {}^{T}\underline{\underline{\mathrm{grad}}} \, \underline{\hat{U}} \right] \tag{7.22}$$

et $\left[\underline{\hat{U}}\right]$ le *saut de vitesse virtuelle* à la traversée de la surface de discontinuité de vitesse en suivant la normale $\underline{n}$ (Fig. 7.12). On a $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{d}}} = \sigma_{ij} \, \hat{d}_{ij}$ avec sommation sur les indices répétés.

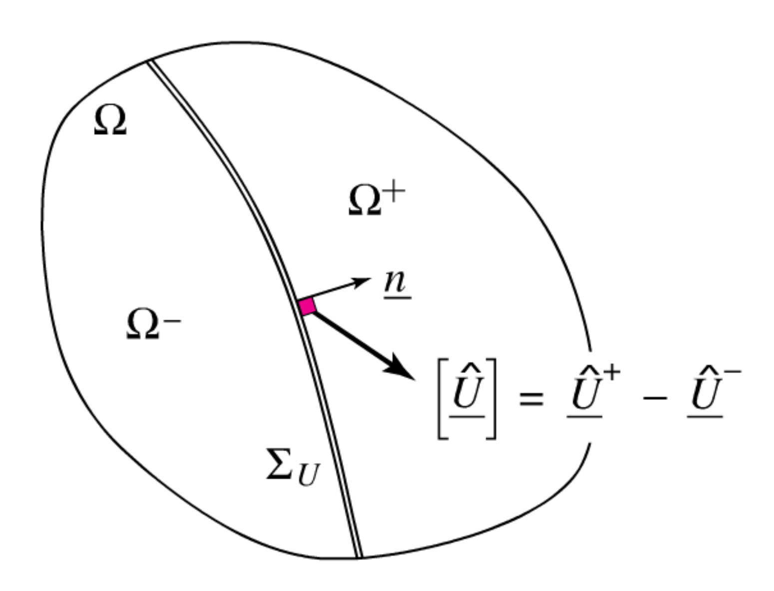


Figure 7.12 Surface de discontinuité d'un champ de vitesse virtuel.

Le PPV s'écrit donc :

$$\forall \underline{\hat{U}}\ ,\ \forall \underline{\underline{\sigma}} \text{ tel que } \begin{cases} \underline{\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}} + \rho \underline{F} = \underline{0} \quad \text{ dans } \Omega \setminus \Sigma_\sigma \\ [\, \underline{\underline{\sigma}}\,] \,.\, n = \underline{0} \ \text{ sur } \Sigma_\sigma \end{cases}$$
$$P_e(\underline{\hat{U}}) = P_d(\underline{\hat{U}}). \tag{7.23}$$

Il est important de noter que le PPV *n'exprime rien d'autre que la « dualisation » mathématique des équations d'équilibre*. Il n'a en particulier aucun rapport avec de quelconques considérations énergétiques ou thermodynamiques. Il constitue en revanche un outil essentiel de l'approche cinématique par l'extérieur du *Calcul à la Rupture* qui sera présenté dans le chapitre 20.

8 Comportement élastique des sols

8.1 Comportement élastique isotrope en transformation infinitésimale

Dans l'hypothèse de *transformation infinitésimale isotherme* (température maintenue constante), le comportement d'un sol supposé *élastique isotrope* s'exprime par la relation :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \lambda(\mathrm{Tr}\ \underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}}, \tag{8.1}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ désigne la contrainte de Cauchy dans la configuration actuelle, $\underline{\underline{\sigma}}_0$ la contrainte dans l'état initial, tandis que $\underline{\underline{\epsilon}}$ représente la déformation (linéarisée) calculée entre les deux configurations. λ et μ sont les modules de Lamé (évalués en pascals), caractéristiques du comportement du matériau.

Cette relation s'écrit de manière équivalente :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\nu}{E}\left(\mathrm{Tr}\ (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)\right)\underline{\underline{1}}, \tag{8.2}$$

faisant apparaître le *module d'Young E* et le *coefficient de Poisson* ν.

8.2 Problème d'élasticité HPP

Dans le cas d'un comportement élastique du sol constituant un ouvrage, le calcul des déplacements qu'il subit sous l'action des charges qui lui sont appliquées, se ramène à la résolution d'un problème d'élasticité

formulé dans le cadre de l'*Hypothèse des Petites Perturbations* (*HPP*, qui inclut notamment celle de transformation infinitésimale). Celle-ci repose sur trois types de données.

- Les données relatives à la *géométrie* du domaine Ω occupé par la structure ou l'ouvrage.
- Celles relatives au *comportement élastique* du matériau, à travers la connaissance du tenseur des modules d'élasticité, ou des coefficients (λ, μ) ou (E, ν) dans le cas isotrope, ainsi que du champ de contrainte initial $\underline{\underline{\sigma}}_0$.
- Enfin les données relatives au *chargement* portant d'une part sur le champ de forces de volume $\underline{F}_d$ (pesanteur, gradient hydraulique...), d'autre part sur les *conditions aux limites* qui peuvent s'écrire comme suit :

$$\xi_i(\underline{x}) = \xi_i^d(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_{\xi_i}\,, T_i(\underline{x}) = T_i^d(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in S_{T_i}\,, \qquad (8.3)$$

où S_{T_i} et S_{ξ_i} forment une *partition* de $\partial\Omega$ (Fig. 8.1)

$$\partial\Omega = S_{T_i} \cup S_{\xi_i} \quad , \quad S_{T_i} \cap S_{\xi_i} = \emptyset. \qquad (8.4)$$

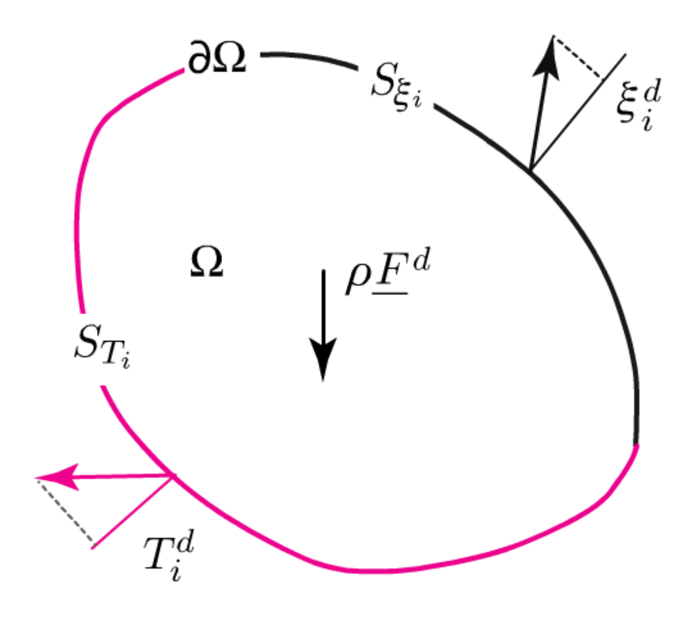


Figure 8.1 Données relatives au chargement d'un ouvrage.

Les relations (8.4) expriment qu'en tout point du bord Ω doivent être données trois composantes orthogonales entre elles pour l'ensemble des deux vecteurs contrainte $\underline{T}$ et déplacements $\underline{\xi}$. Ces données permettent de définir l'ensemble des champs de contraintes *statiquement admissibles* (S.A.) avec les données en efforts d'une part

$$\mathcal{S} = \{\underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A. avec } \underline{F}^d, T_i^d\}, \tag{8.5}$$

c'est-à-dire vérifiant les équations d'équilibre et les conditions aux limites en contrainte, l'ensemble des champs de déplacements *cinématiquement admissibles* (C.A.) d'autre part avec les données en déplacements :

$$\mathcal{C} = \{\underline{\xi}\,;\ \xi_i = \xi_i^d \text{ sur } S_{T_i}\}. \tag{8.6}$$

Dans ces conditions, la *solution d'un problème d'élasticité HPP* est constituée du couple $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$ formé par un champ de déplacement C.A. et un champ de contrainte S.A., associés en tout point par la loi de comportement élastique, comme indiqué sur le schéma de la figure 8.2. On démontre l'*unicité* d'une telle solution.

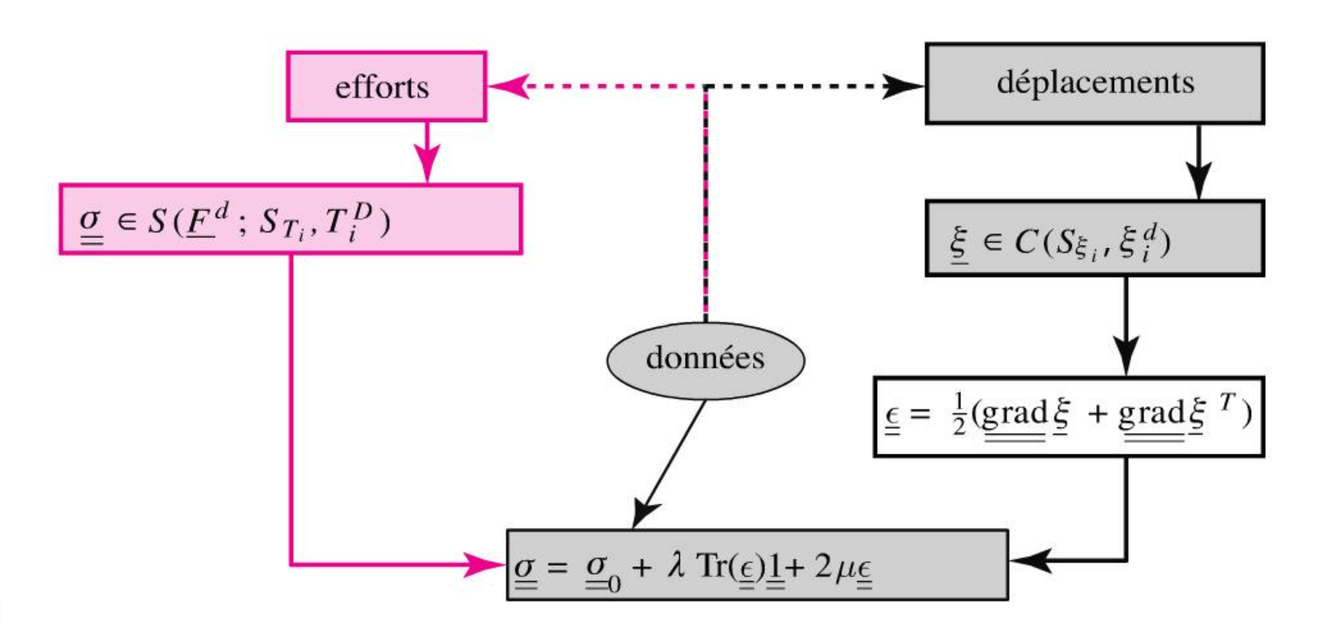


Figure 8.2 Structure générale d'un problème d'élasticité HPP.

8.3 Exemples

8.3.1 Tassement d'une couche de sol élastique

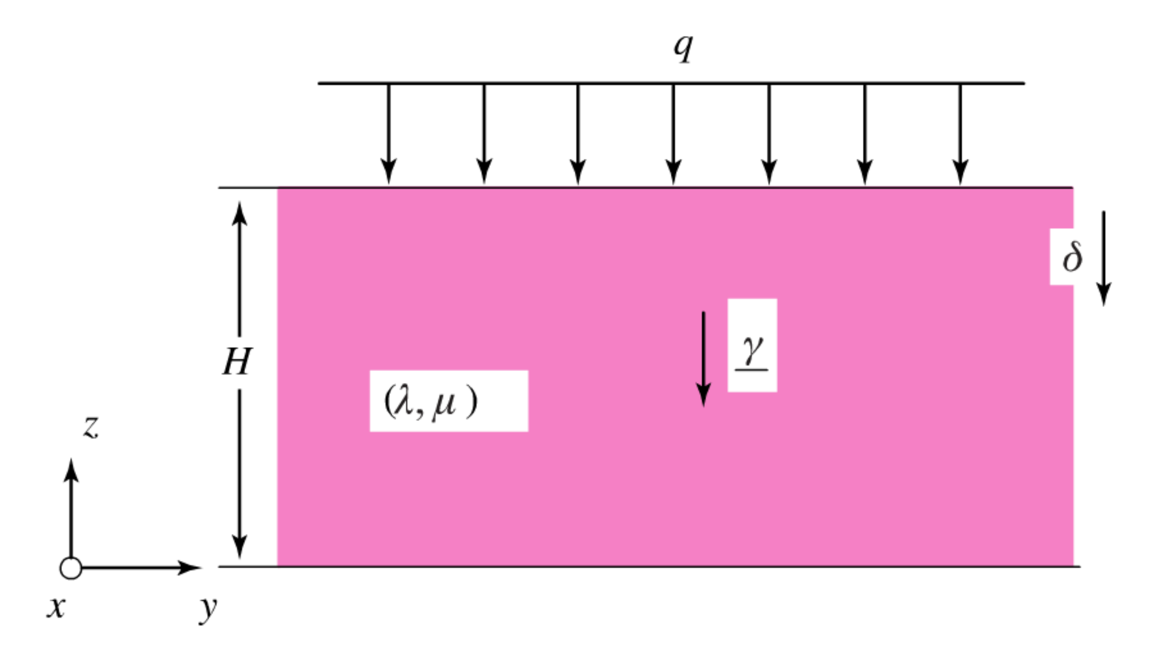


Figure 8.3 Tassement d'une couche de sol.

Une couche d'épaisseur H, constituée d'un sol élastique homogène isotrope de modules de Lamé (λ,μ), est soumise à une surcharge en surface d'intensité q. On recherche le champ de déplacement sous la forme :

$$\underline{\xi} = -\delta \frac{z}{H} \underline{e}_z, \tag{8.7}$$

auquel est associé le champ de déformation uniaxiale homogène :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = -\frac{\delta}{H} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z. \tag{8.8}$$

Le champ de contrainte s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 - (\lambda + 2\mu) \frac{\delta}{H} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z - \lambda \frac{\delta}{H} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y), \tag{8.9}$$

$\underline{\underline{\sigma}}_0$ désignant le champ de contrainte régnant dans le massif avant l'application de la surcharge.

$\underline{\underline{\sigma}}_0$ vérifie en particulier :

$$\underline{\underline{\sigma}}_0(z = H) \,.\, \underline{e}_z = \underline{0}, \tag{8.10}$$

ainsi que l'équation d'équilibre avec le poids volumique du sol :

$$\underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\gamma} = \underline{0}. \tag{8.11}$$

Le champ $\underline{\underline{\sigma}}$ donné par l'équation 8.9 satisfait la même équation d'équilibre puisque $\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0$ est le champ de contrainte homogène associé à l'application de la surcharge. Il vérifie par ailleurs la condition aux limites en surface :

$$\underline{\underline{\sigma}}(z = H) \,.\, \underline{e}_z = -q\underline{e}_z. \tag{8.12}$$

On en déduit directement la relation linéaire entre la surcharge et le tassement en surface :

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\delta}{H} = q, \tag{8.13}$$

$\lambda + 2\mu$ représentant le module œdométrique du sol.

8.3.2 Modélisation élastique de l'essai pressiométrique

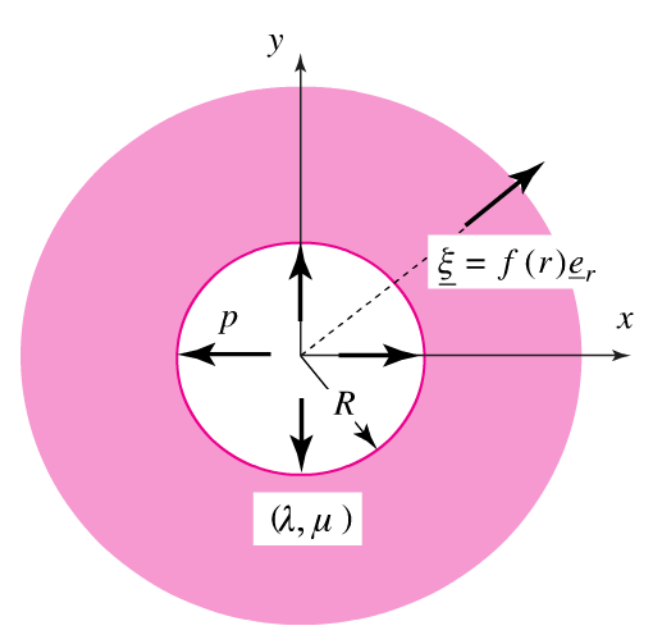


Figure 8.4 Schématisation de l'essai pressiométrique.

Cet essai in situ consiste à introduire une sonde dans un trou cylindrique circulaire de rayon R, préalablement foré dans le sol, en vue d'appliquer une pression p croissante sur la paroi du trou. Ce chargement engendre en tout point du massif un déplacement radial de la forme (Fig. 8.4) :

$$\underline{\xi} = f(r)\underline{e}_r. \tag{8.14}$$

Le champ de déformation associé s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{df(r)}{dr}\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{f(r)}{r}\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta, \tag{8.15}$$

d'où l'on déduit en appliquant le relation de comportement élastique le champ de contrainte :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\sigma}}_0 + \lambda\left(\frac{df(r)}{dr} + \frac{f(r)}{r}\right)\underline{\underline{1}} \\ &+ 2\mu\left(\frac{df(r)}{dr}\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{f(r)}{r}\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta\right), \end{aligned} \tag{8.16}$$

$\underline{\underline{\sigma}}_0$ étant le champ de contrainte régnant dans le massif avant l'application de la surcharge qui, tout comme le champ $\underline{\underline{\sigma}}$, vérifie l'équation d'équilibre avec le même poids volumique du sol, d'où :

$$\underline{\mathrm{div}}\,(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) = \underline{0}, \tag{8.17}$$

qui, après calculs, conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{df}{dr} + \frac{f}{r}\right) = 0. \tag{8.18}$$

La solution de cette dernière est de la forme :

$$f(r) = Ar + \frac{B}{r}, \tag{8.19}$$

les deux constantes d'intégration étant déterminées en exprimant que $f(r \to \infty) = 0$, d'où $A = 0$, ainsi que la condition aux limites en paroi, qui s'écrit :

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)(r = R) \, . \, (-\underline{e}_r) = p\underline{e}_r, \tag{8.20}$$

ou encore après calculs :

$$B = \frac{pR^2}{2\mu}. \tag{8.21}$$

Le champ de déplacement solution s'écrit finalement :

$$\underline{\xi} = p\frac{R^2}{2\mu r}\underline{e}_r \tag{8.22}$$

et l'augmentation de volume de la sonde pressiométrique (calculée par unité de longueur selon Oz) vaut :

$$\Delta V = \pi\left[(R + f(R))^2 - R^2\right] \approx 2\pi R f(R) = \pi\frac{pR^2}{\mu}. \tag{8.23}$$

On aboutit finalement à la relation de proportionnalité suivante entre la pression appliquée par la sonde et l'augmentation de volume relative de cette dernière, ces deux grandeurs étant mesurées :

$$p = \mu\frac{\Delta V}{V}, \tag{8.24}$$

ce qui fournit une évaluation du *module élastique de cisaillement* du sol μ.

9 Comportement élasto-plastique

Comme de nombreux matériaux, les sols manifestent un *comportement plastique* dès qu'ils sont sollicités au-delà d'un certain seuil. La formulation d'un tel comportement repose sur l'introduction de deux notions : celle de *critère de plasticité* d'une part, de *règle d'écoulement plastique* d'autre part.

9.1 Critère de plasticité et fonction de charge

L'interprétation d'essais expérimentaux réalisés sur des éprouvettes permet de mettre en évidence l'existence d'un *domaine d'élasticité initial* (généralement convexe) d'un sol, dans l'espace des contraintes (Fig. 9.1). Ce domaine, noté $\mathcal{C}(0)$, est tel qu'au terme de tout *cycle de chargement*, représenté par une courbe fermée (telle que 1 sur la figure) contenue dans le domaine, n'apparaît aucune déformation plastique, c'est-à-dire que le sol se comporte élastiquement. À l'inverse, le suivi d'un trajet de chargement tel que (2), au cours duquel le seuil d'élasticité représenté par la frontière de $\mathcal{C}(0)$, est franchi, va engendrer des déformations irréversibles, appelées déformations *plastiques*. Il en résulte également une modification du domaine d'élasticité, appelé *domaine d'élasticité actuel* $\mathcal{C}(E)$, manifestation de l'écrouissage du matériau, symbolisé par E.

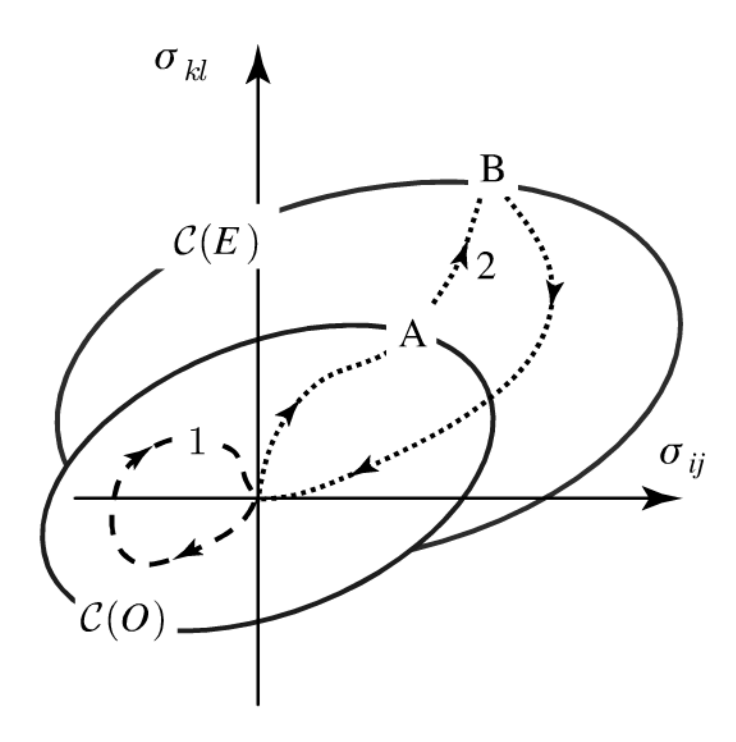


Figure 9.1 Domaines d'élasticité initial et actuel d'un sol.

Il est alors commode de caractériser ces domaines par la donnée d'une *fonction de charge*, notée $f(\underline{\underline{\sigma}}, E)$, telle que, pour un état d'écrouissage donné E :

- $f(\underline{\underline{\sigma}}, E) < 0$ si $\underline{\underline{\sigma}}$ est à l'intérieur de $\mathcal{C}(E)$;
- $f(\underline{\underline{\sigma}}, E) = 0$ si $\underline{\underline{\sigma}}$ est situé sur la frontière de $\mathcal{C}(E)$;
- $f(\underline{\underline{\sigma}}, E) > 0$ si $\underline{\underline{\sigma}}$ est à l'extérieur de $\mathcal{C}(E)$.

On observera que la seule situation physiquement possible correspond à $f(\underline{\underline{\sigma}}, E) \leqslant 0$ c'est-à-dire que le point représentatif de l'état de contrainte ne peut jamais être extérieur au domaine d'élasticité *actuel*. Ainsi, la portion AB du trajet de chargement 2 correspond au franchissement de la frontière du domaine $\mathcal{C}(0)$, $(f(\underline{\underline{\sigma}}, E = 0) > 0)$, mais à l'« entraînement » de la frontière du domaine *actuel* $\mathcal{C}(E)$, $(f(\underline{\underline{\sigma}}, E) = 0)$, les paramètres d'écrouissage E évoluant avec $\underline{\underline{\sigma}}$ dans cette phase de « *charge plastique* ».

Le cas de la *plasticité parfaite* correspond à la situation où le domaine d'élasticité est *fixe*, de sorte qu'il n'y a plus lieu de distinguer les domaines

d'élasticité initial et actuel. La fonction de charge n'est alors plus fonction des paramètres d'écrouissage.

Dans le cas où le sol est *isotrope*, la fonction de charge apparaît comme une fonction des seules *contraintes principales* notées $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, puisque la propriété d'isotropie du matériau traduit le fait (vérifiable expérimentalement) que la condition d'apparition de la plasticité ne fait nullement intervenir l'*orientation* du trièdre des directions principales de la contrainte par rapport à un trièdre de directions matérielles (Fig. 9.2) :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \tilde{f}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leqslant 0. \tag{9.1}$$

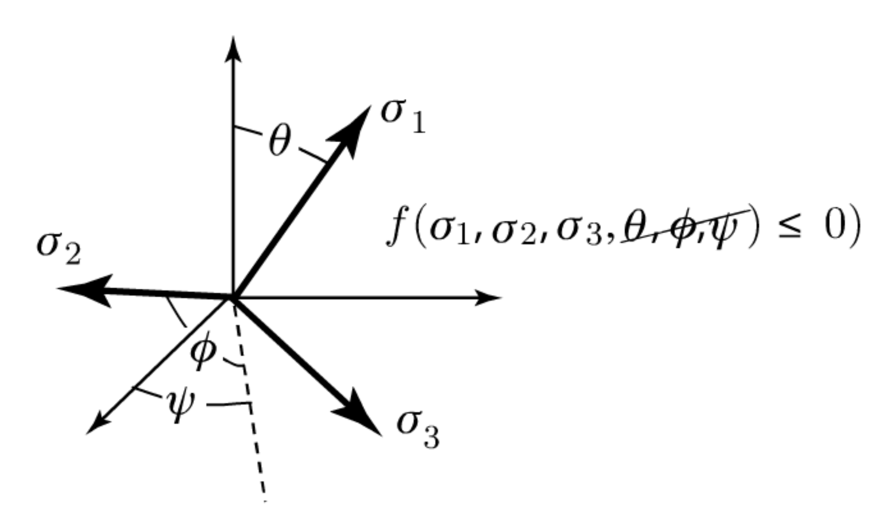


Figure 9.2 Critère de plasticité d'un sol isotrope.

Il en résulte en particulier que le domaine d'élasticité, qui peut être représenté dans l'espace des contraintes principales possède dans cet espace une symétrie ternaire autour de l'axe des contraintes isotropes puisque $\hat{f}$ est une fonction *symétrique* de ses arguments. Le *critère de plasticité de Mohr-Coulomb* fournit l'exemple d'un tel critère isotrope utilisé classiquement pour les sols.

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2C \cos \phi \leqslant 0, \tag{9.2}$$

où σ_1 et σ_3 désignent respectivement les contraintes principales majeure et mineure, C la *cohésion* du sol et ϕ son *angle de frottement interne*, dont

la valeur peut dépendre des paramètres d'écrouissage E. Le *critère de Tresca* correspond au cas où l'angle de frottement est nul.

De façon équivalente, le critère de plasticité d'un sol isotrope peut être exprimé à travers une fonction de charge ne dépendant que des *invariants* de la contrainte, et le plus souvent de ses deux *premiers invariants* définis par :

$$p = -\frac{1}{3}\mathrm{Tr}\,(\underline{\underline{\sigma}}) \quad \text{et} \quad q = \left(\frac{1}{2}\,\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}\right)^{1/2}, \tag{9.3}$$

où $\underline{\underline{s}}$ désigne le déviateur de contrainte défini par 7.8. L'exemple de tels critères est donné par le *critère de Drücker-Prager* qui s'écrit

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = q - \alpha p - k \leqslant 0, \tag{9.4}$$

Le cas du *critère de von Mises* correspondant à $\alpha = 0$. Le *critère de Cam Clay*, qui sera analysé au chapitre 16, paragraphe 16.1, constitue un autre exemple de critère classiquement utilisé pour décrire la plasticité des sols, qui ne fait intervenir que ces deux premiers invariants.

9.2 Règle d'écoulement plastique et formulation en vitesse de la loi de comportement

Le loi de comportement élasto-plastique s'écrit en vitesse sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{d}}^e + \underline{\underline{d}}^p, \tag{9.5}$$

où $\underline{\underline{d}}$ désigne le taux de déformation totale ($= \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}$) et $\underline{\underline{d}}^e$ et $\underline{\underline{d}}^p$ représentent respectivement les parties *élastique* et *plastique* de ce taux de déformation.

Dans le cas d'un sol isotrope, la partie élastique du taux de déformation s'écrit :

$$\underline{\underline{d}}^e = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \frac{\nu}{E}[\text{Tr}\,\underline{\underline{\dot{\sigma}}}]\,\underline{\underline{1}}. \tag{9.6}$$

Pour le même sol isotrope, la partie plastique du taux de déformation obéit à la règle d'*écoulement plastique*, qui s'exprime dans le cas général sous la forme :

$$\underline{\underline{d}}^p = \begin{cases} 0 \text{ si } \begin{cases} f(\underline{\underline{\sigma}}, E) < 0 \\ ou \\ f(\underline{\underline{\sigma}}, E) < 0 \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \leqslant 0 \end{cases} \\ \dfrac{1}{M(\underline{\underline{\sigma}}, E)}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}\right)\dfrac{\partial g}{\partial \sigma} \text{ si } f(\underline{\underline{\sigma}}, E) = 0 \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} > 0, \end{cases} \tag{9.7}$$

où M désigne le *module d'écrouissage*, tandis que g représente le *potentiel plastique.*

Cette règle d'écoulement plastique est illustrée géométriquement dans l'espace des contraintes sur la figure 9.3. Le cas de la *plasticité parfaite* (absence d'écrouissage) est obtenu par passage à la limite, en faisant tendre le module d'écrouissage vers zéro, tandis que dans le même temps le taux de variation de la fonction de charge à écrouissage constant tend également vers zéro, de sorte que leur produit, appelé *multiplicateur plastique* est indéterminé mais positif :

$$\dot{\lambda} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \to 0}{M \to 0} \geqslant 0. \tag{9.8}$$

Le cas où $f = g$ correspond à la situation où le taux de déformation plastique est normal à la surface de charge. On dit alors que la règle d'écoulement plastique est *associée*, ou que le matériau obéit au *principe du travail plastique maximal.*

Prenons l'exemple où l'on adopte le critère de Mohr-Coulomb (9.2) pour modéliser la plasticité d'un sol, le potentiel plastique associé s'écrit :

$$g(\underline{\underline{\sigma}}) = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\,\sin\,\psi. \tag{9.9}$$



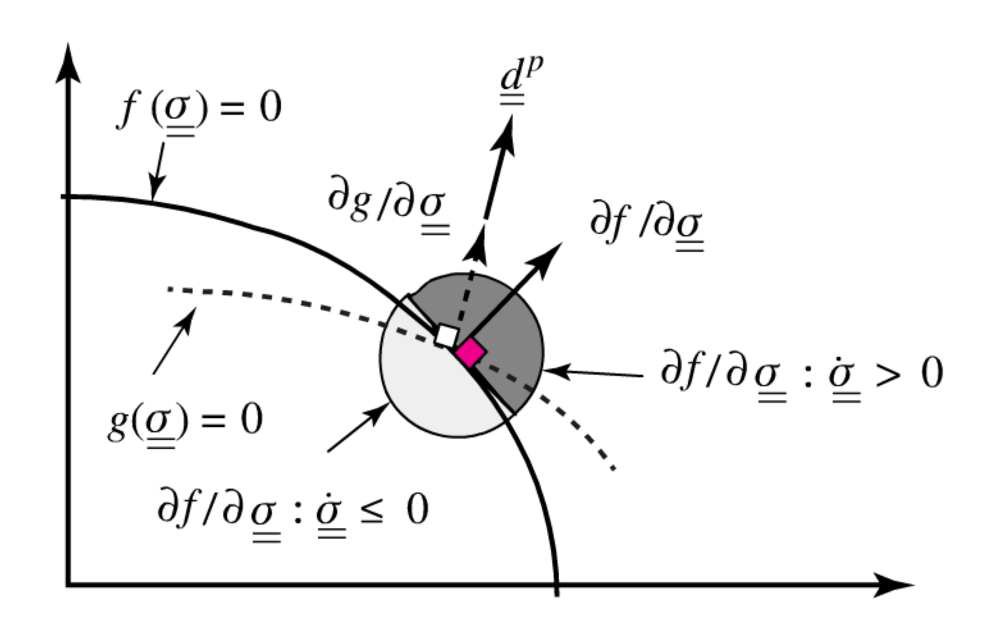


Figure 9.3 Règle d'écoulement plastique.

Les valeurs principales du taux de déformation plastique (dont les directions principales coïncident avec celles de la contrainte) sont alors de la forme :

$$d_1^p = \dot{\lambda}(1 + \sin\psi), d_2^p = 0, d_3^p = -\dot{\lambda}(1 - \sin\psi), \qquad (9.10)$$

et le taux de dilatation volumique plastique vaut :

$$\mathrm{Tr}\, \underline{\underline{d}}^p = 2\dot{\lambda} \sin\dot{\psi} \geqslant 0. \qquad (9.11)$$

On dit que le sol est *plastiquement dilatant*, l'angle $\psi \leqslant \phi$ étant appelé *angle de dilatance plastique*. La dilatance plastique est maximale lorsque l'angle de dilatance est égal à l'angle de frottement ($\psi = \phi$), c'est-à-dire lorsque la règle d'écoulement plastique est associée.

Dans le cas d'un sol purement cohérent, obéissant à un critère de Tresca ($\psi = \phi = 0$), le comportement met en évidence une *incompressibilité plastique*, correspondant à une règle d'écoulement associée.

9.3 Résolution des problèmes de plasticité

Se plaçant toujours dans l'hypothèse des petites perturbations, les données d'un problème d'évolution élasto-plastique, relatives au *chargement*, sont identiques à celles d'un problème d'élasticité (voir paragraphe 8.2), la seule différence étant que ces données sont fonctions du temps t variant dans l'intervalle $[0, T]$. On définit alors à tout instant l'ensemble $\mathcal{S}(t)$ des champs de contrainte S.A. avec les données en efforts (forces volumiques et conditions aux limites en contrainte), ainsi que l'ensemble $\mathcal{C}(t)$ des champs de déplacement C.A. avec les conditions aux limites correspondantes.

De même, en considérant pour simplifier le cas d'un comportement *parfaitement plastique* du sol, on introduit l'ensemble des champs de contrainte *plastiquement admissibles*, défini par :

$$\mathcal{P} = \{\underline{\underline{\sigma}}\,;\ \forall \underline{x},\ f(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) \leqslant 0\}. \tag{9.12}$$

Il reste alors à préciser l'*état initial* de la structure, en se donnant le champ de contrainte correspondant :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t = 0) = \underline{\underline{\sigma}}_0(\underline{x}), \tag{9.13}$$

qui doit être *statiquement et plastiquement admissible*

$$\underline{\underline{\sigma}}_0 \in \mathcal{S}(t = 0) \cap \mathcal{P}. \tag{9.14}$$

Résoudre un tel problème d'évolution élasto-plastique consiste alors à déterminer un couple $(\underline{\underline{\sigma}}(t), \underline{\xi}(t)), t \in [0, T]$ vérifiant l'ensemble des conditions suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(t = 0) = \underline{\underline{\sigma}}_0 \\ \underline{\underline{\sigma}}(t) \in \mathcal{S}(t) \cap \mathcal{P} \\ \underline{\xi}(t) \in \mathcal{C}(t), \end{cases} \tag{9.15}$$

ainsi que la *loi de comportement* exprimée à travers les relations (9.5) à (9.7).



Le schéma de la figure 9.4 représente la structure générale d'un problème d'évolution élasto-plastique.

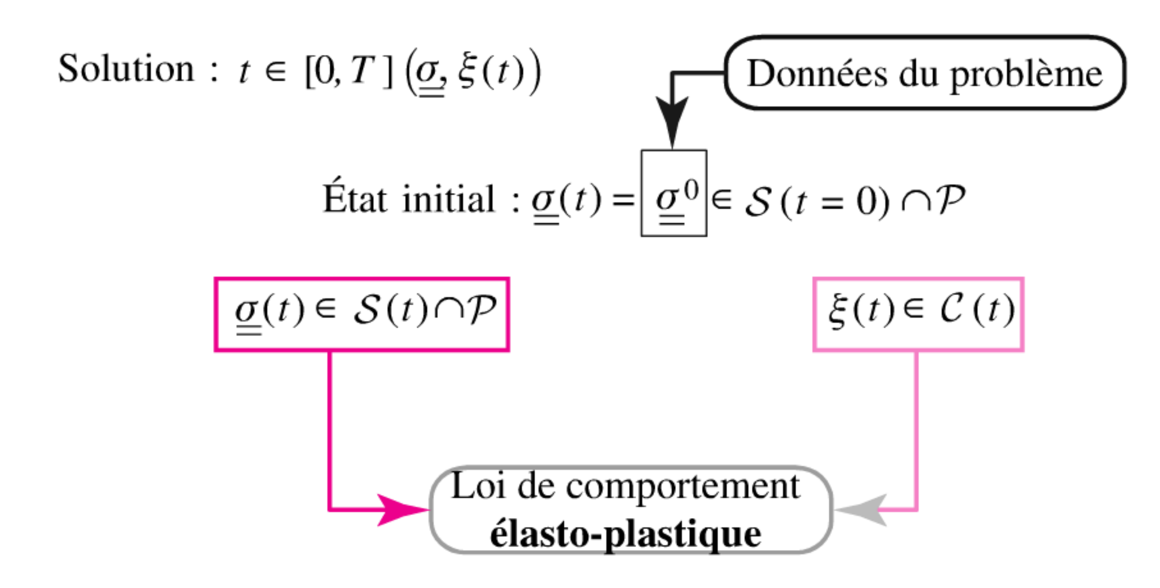


Figure 9.4 Structure générale d'un problème d'évolution élasto-plastique.

Dans le cas où le chargement peut être décrit par un nombre fini de paramètres $\underline{Q} = \{Q_i, i = 1,...,n\}$, on établit les résultats généraux suivants (Halphen et Salençon, 1987 [22] ; de Buhan, 2007 [6], pour un comportement élastique *parfaitement plastique* avec règle d'écoulement associée.

- Partant d'un *état initial* caractérisé par $\underline{Q} = \underline{0}$, l'évolution du système demeure élastique tant que le *trajet de chargement* – représenté par une courbe dans l'espace des chargements $\underline{Q}$ (Fig. 9.5) – demeure à l'intérieur d'un domaine, appelé *domaine d'élasticité initial* du système. Sa frontière est une surface formée de l'ensemble des chargements $\underline{Q}_e$ qui correspondent au *seuil d'élasticité* du système.
- Poursuivant le chargement sur un trajet qui franchit la frontière du domaine d'élasticité initial, on observe une *irréversibilité du système* qui se traduit par le fait qu'au terme d'un cycle mécanique de *charge-décharge* (courbe fermée dans l'espace des $\underline{Q}$), les déplacements du système, et en particulier le déplacement résiduel généralisé, ne sont pas nuls. On constate par ailleurs un écrouissage du système qui se mani-

feste par une transformation du domaine d'élasticité initial en *domaine d'élasticité actuel* (domaine en pointillé sur la figure 9.5).

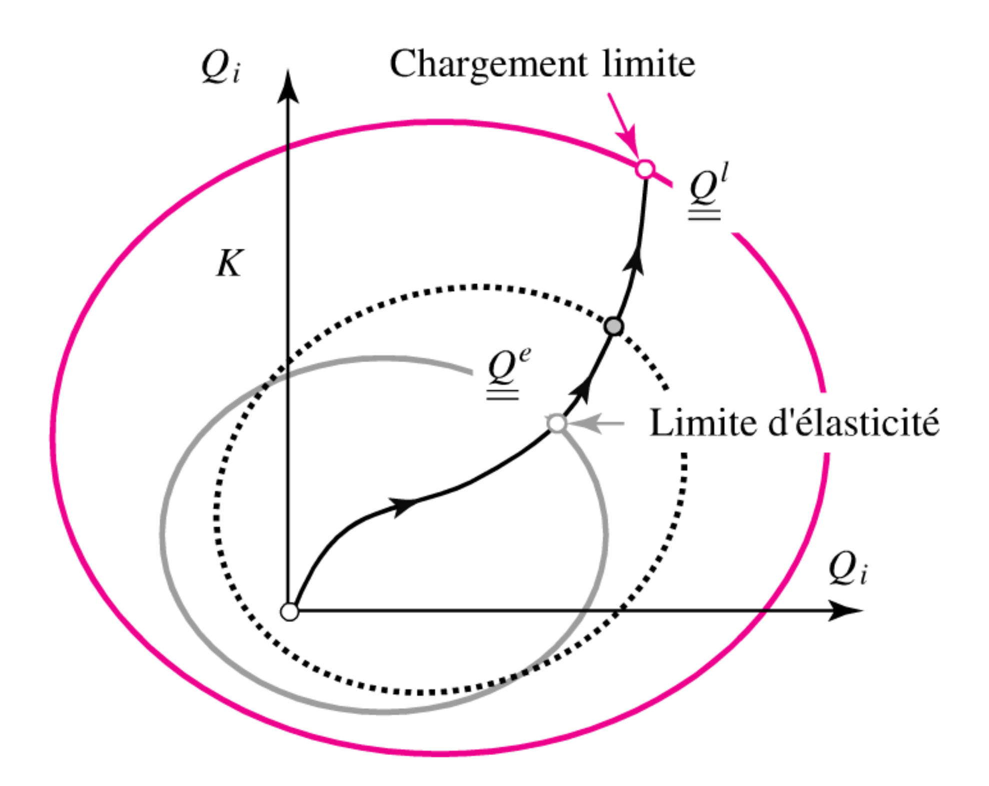


Figure 9.5 Évolution élasto-plastique d'un système en matériau élastique parfaitement plastique dans le cas d'un mode de chargement à plusieurs paramètres.

▶ Cette phase de comportement élasto-plastique s'achève lorsque le long du trajet de chargement, la charge $\underline{Q}$ atteint une valeur limite, au-delà de laquelle il n'est plus possible d'assurer simultanément l'équilibre du système et le respect du critère de plasticité en tout point. C'est le *chargement limite* $\underline{Q}_l$. L'ensemble de ces chargements constitue la frontière d'un domaine *K* (Fig. 9.5) qui ne dépend que de la *géométrie* du système, de son *chargement* et du *critère de plasticité*. Il est en revanche *indépendant* :

– de l'*état initial* du système ;
– des *modules d'élasticité* du sol constitutif ;
– du *trajet de chargement suivi* jusqu'au chargement limite.

Lorsque le chargement limite est effectivement atteint, le système continue de se déformer sous charge constante: il y a apparition d'un *mécanisme d'écoulement plastique* libre ou de ruine plastique. De façon qualitative, cela signifie que les zones entrées en plasticité sont suffisamment étendues pour que le *champ des taux de déformations plastiques* devienne *géométriquement compatible*, induisant alors la ruine plastique du système. Nous verrons dans la partie F comment les chargements limites peuvent être directement évalués à partir d'un raisonnement fondé sur la théorie du *Calcul à la Rupture*.



Comportement hydro-mécanique des sols

10 Comportement hydraulique du sol

Les sols – en particulier les sols fins – sont des matériaux hétérogènes dont le comportement mécanique complexe peut être affecté de manière très significative par la présence d'eau. Il est donc essentiel de ne pas dissocier comportement hydraulique et comportement mécanique du sol de sorte à bien prendre en compte les interactions fortes entre ces deux phénomènes de nature différente. La présentation adoptée ici s'inspire de celle développée par Coussy, 1991 [10] et Dormieux et Bourgeois, 2002 [14].

Le sol est un milieu poreux, de porosité n, constitué d'un *squelette solide déformable* et d'un *fluide* (ou plusieurs) éventuellement *compressible* qui peut ou non circuler au travers un *réseau poreux* complexe (Fig. 10.1). Ces entités se déformant de manière différente – elles mènent chacune leur propre vie – ; il apparaît assez naturel qu'à l'instant actuel t l'*élément de volume* $d\Omega_t$ qui est suivi dans son mouvement soit défini en se référant au squelette solide dont le mouvement est limité. Cet élément de masse dM contient une quantité de squelette solide de masse dM_s et de fluide de masse dM_w. Les vitesses particulaires moyennes sont respectivement $(\underline{V}_s)$ pour le squelette solide et $(\underline{V}_w)$ pour le fluide (souvent de l'eau). Si plusieurs phases sont présentes dans le fluide (e.g. eau et air), il suffit de définir les grandeurs pour chaque phase fluide.

On peut alors définir la vitesse relative du fluide par rapport au squelette solide par :

$$\underline{V}_r = \underline{V}_w - \underline{V}_s. \qquad (10.1)$$

Cette grandeur est pertinente à l'échelle locale de l'élément de volume $d\Omega$. Dans les problèmes géotechniques, la *vitesse apparente d'écoulement du fluide* est une grandeur plus utile. Cette vitesse V, appelée *vecteur*



filtration, est plus faible que V_r dans la mesure où le fluide ne remplit pas tout le volume $d\Omega_t$. On la définit par :

$$\underline{V} = n\underline{V}_r = n\left(\underline{V}_w - \underline{V}_s\right). \quad (10.2)$$

Dans le cas pratique d'une mesure en laboratoire, le squelette étant fixe, la quantité $n\underline{V}_r$ correspond à la valeur mesurée de la vitesse du fluide ramenée à la surface totale concernée par le flux de fluide.

On peut également introduire la notion de *vecteur courant relatif de masse fluide* :

$$\underline{w} = n\rho_w\underline{V}_r, \quad (10.3)$$

qui correspond à un débit massique du fluide à la surface totale concernée par le flux de fluide.

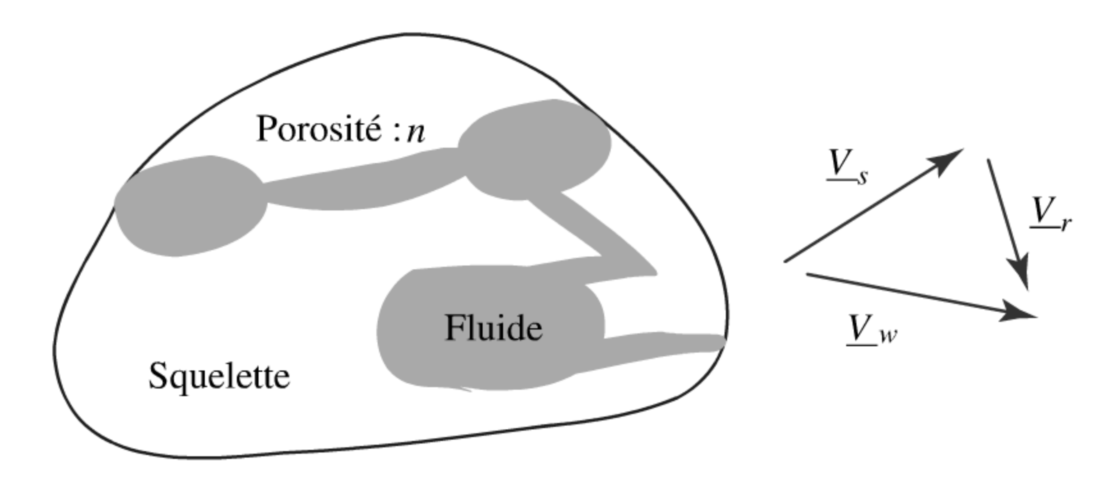


Figure 10.1 Vecteur filtration.

10.1 Équations de conservation de la masse

L'évolution de la masse dM de l'élément de volume $d\Omega_t$ – le même que celui appelé dV dans le chapitre 5 –, contenant du squelette de masse dM_s et du fluide de masse dM_w est régie par les *équations de conservation de la masse*. Le principe de conservation stipule que la masse du sque-

lette contenue dans l'élément de volume $d\Omega_t$ que l'on suit dans le mouvement du squelette est invariable. Cela implique notamment que le milieu poreux est non réactif ce qui signifie qu'il n'y a pas d'échange de masse entre le squelette et le fluide. C'est l'hypothèse qui sera adoptée tout au long de cette présentation.

Il est alors intéressant définir la notion de *masse volumique apparente* ρ_s^a rapportée au volume élémentaire $d\Omega_t$ défini par le squelette :

$$\rho_s^a = \frac{dM_s}{d\Omega_t}. \tag{10.4}$$

Cette grandeur est assimilable à la masse volumique apparente sèche ρ_d d'un sol qui peut être déterminée en laboratoire.

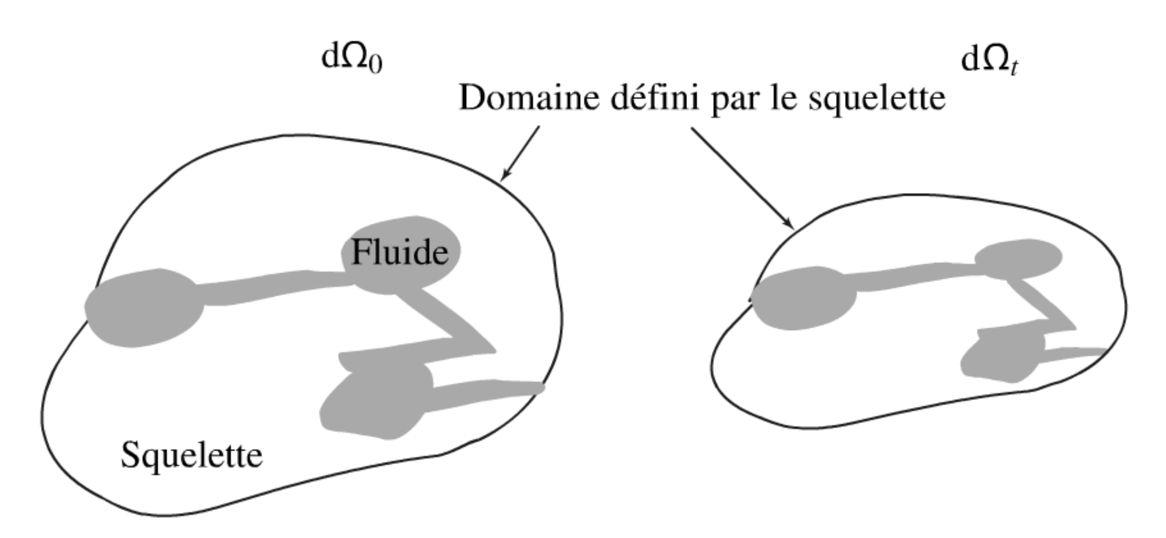


Figure 10.2 Configurations du milieu poreux aux instants 0 et *t*.

On pourra de manière équivalente définir la masse volumique apparente du fluide par :

$$\rho_w^a = \frac{dM_w}{d\Omega_t}. \tag{10.5}$$

Cette masse volumique apparente est reliée à la masse volumique absolue du fluide ρ_w^t par l'expression $\rho_w^a = n\rho_w^t$.

L'élément de squelette situé à l'instant initial $t = 0$ dans $d\Omega_0$ se trouve à l'instant actuel t dans : $d\Omega_t = J_s d\Omega_0$, avec J_s le jacobien de la transfor-



mation (défini sur le squelette solide qui nous sert de référence d'où l'indice s). Sa masse vaut :

$$\rho_s^a \mathrm{d}\Omega_t = \rho_s^a J_s \mathrm{d}\Omega_0. \qquad (10.6)$$

En raison de l'invariabilité de la masse du squelette, la *dérivée particulaire* permet d'écrire, en suivant le squelette solide non réactif :

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t}(J_s \rho_s^a) = 0. \qquad (10.7)$$

La notation d^s permet de se rappeler que l'on suit le squelette dans son mouvement. Cette équation exprime simplement le fait que le squelette, suivi dans son mouvement, est à masse invariable. On peut aussi écrire cette relation :

$$J_s \frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t}(\rho_s^a) + \rho_s^a \frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t}(J_s) = 0. \qquad (10.8)$$

Or on sait d'après l'équation 6.24 que :

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t}(J_s) = J_s \operatorname{div} \underline{V}_s. \qquad (10.9)$$

En incorporant ce résultat dans l'équation 10.8, on aboutit à l'équation de conservation locale de la masse de squelette solide qui s'exprime sous deux formes :

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t}(\rho_s^a) + \rho_s^a \operatorname{div} \underline{V}_s = 0 \text{ ou } \frac{\partial}{\partial t}(\rho_s^a) + \operatorname{div} \rho_s^a \underline{V}_s = 0. \qquad (10.10)$$

En raisonnant de manière analogue pour le fluide, si *on le suit dans son propre mouvement* (ce qui explique le terme div $\underline{V}_w$ avec l'indice $_w$ correspond au fluide qui est souvent le l'eau (water) pour reprendre les notations du chapitre 5) on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}^w}{\mathrm{d}t}(\rho_w^a) + \rho_w^a \operatorname{div} \underline{V}_w = 0 \text{ ou } \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w^a) + \operatorname{div} \rho_w^a \underline{V}_w = 0. \qquad (10.11)$$

Ces relations seront utilisées dans la théorie de la consolidation. Nous en donnerons une écriture simplifiée intégrant les hypothèses classiques.

On peut aussi exprimer la conservation du fluide dans le référentiel associé au squelette solide (vitesse $\underline{V}_s$). Dans ce cas il faudra considérer un terme supplémentaire de flux de fluide au second membre à la vitesse relative $\underline{V}_r$. Cette équation est identique à l'équation 10.11.

10.2 Écriture lagrangienne de la conservation de la masse fluide

Dans cette section, quelques relations liant la déformation macroscopique et les flux de matière sont présentées. Le squelette solide est pris comme référence pour décrire le mouvement du fluide.

Dans le référentiel d'un observateur matérialisé par un repère cartésien orthonormé (O, $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$), la position initiale $\underline{X} = \underline{OM_0}$ (resp. *position actuelle* $\underline{x} = \underline{OM_t}$) du point matériel est attaché au centre de gravité de la phase solide du domaine $d\Omega_0$ dans sa configuration initiale (resp. *du domaine* $d\Omega_t$ *dans sa configuration actuelle*) à l'instant initial $t = 0$ (resp. *à l'instant actuel* t).

À l'instant initial (resp. *l'instant actuel*) la masse de fluide présent dans la porosité initiale n_0 (resp. *porosité actuelle* n_t) du domaine initial $d\Omega_0$ (resp. *du domaine actuel* $d\Omega_t$) s'écrit :

$$dM_w^0 = \rho_w^0 n_0 d\Omega_0, \text{ ou } dM_w^t = \rho_w^t n_t d\Omega_t, \qquad (10.12)$$

où ρ_w^0 (resp. ρ_w^t) est la masse volumique réelle du fluide à l'instant initial (resp. *à l'instant actuel*) dans l'espace poreux, tandis que $\rho_w^{a,0} = \rho_w^0 n_0$ (resp. $\rho_w^a = \rho_w^t n_t$) est la masse volumique apparente du fluide.

La densité volumique *d'apport* de masse fluide m_w est définie par la différence entre la masse fluide présente à l'instant t dans le volume $d\Omega_t$ et celle présente à l'instant $t = 0$ dans le volume $d\Omega_0$. Elle est définie par une formulation lagrangienne en prenant comme référence la configuration initiale l'instant (le volume) t_0 ($d\Omega_0$). $m_w = M_w(\underline{X}, t)$ s'exprime alors par :

$$m_w \mathrm{d}\Omega_0 = \rho_w^a \,\mathrm{d}\Omega_t - \rho_w^{a,0} \mathrm{d}\Omega_0. \tag{10.13}$$

On en déduit avec la définition du jacobien :

$$m_w = \rho_w^a J^s - \rho_w^{a,0}, \tag{10.14}$$

ou en faisant intervenir les masses volumiques réelles et les porosités :

$$\boxed{m_w = n_t \rho_w^t J^s - n_0 \rho_w^0.} \tag{10.15}$$

Dans l'hypothèse des variations infinitésimales cette expression peut être linéarisée en sachant que : $J^s = 1 + \mathrm{Tr}\,(\underline{\underline{\epsilon}}^s)$, $\rho_w^t = \rho_w^0 + \delta\rho_w$ et $n_t = n_0 + \delta n$. L'équation 10.15 peut être approximée par :

$$m_w \approx n_0 \rho_w^0 \left(\mathrm{Tr}\,(\underline{\underline{\epsilon}}^s) + \delta\rho_w / \rho_w^0 + \delta n / n_0 \right). \tag{10.16}$$

On interprète cette relation comme suit : l'apport de masse fluide peut provenir – dans l'ordre des termes apparaissant dans le second membre – d'une déformation du squelette solide, d'une variation de la masse volumique du fluide ou d'une variation de porosité.

En reprenant l'équation 10.11 avec la quantité m_w (Éq. 10.15) qui est dérivée particulairement par rapport au squelette solide on a :

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t} m_w = -J^s \,\mathrm{div}\, \underline{w}. \tag{10.17}$$

Remarque

Dans le cas où le fluide est également incompressible alors $\delta\rho_w = 0$. La variation de porosité est alors (voir exemples du pararaphe 5.5) $\delta n = (1 - n_0)\,\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\epsilon}}$ et l'équation 10.16 se simplifie :

$$m_w = \rho_w \mathrm{Tr}\, \underline{\underline{\epsilon}}^s. \tag{10.18}$$

L'équation de conservation du volume s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}^s \mathrm{Tr}\, \underline{\underline{\epsilon}}^s}{\mathrm{d}t} = -J^s \ \mathrm{div}\ \underline{w}/\rho_w, \qquad (10.19)$$

et peut s'interpréter comme suit : la variation de volume (cachée dans celle de la porosité n) est uniquement due au fluide qui entre et sort du volume étudié.

10.3 Perméabilité, loi de Darcy

L'eau libre se déplace dans le solide à travers un réseau poreux connecté constitué de canaux, de pores et de fissures selon la nature de sol. L'aptitude d'un sol ou roche à être traversée par un fluide se caractérise par la perméabilité définie ci-dessous. Par souci de simplicité, dans la suite, le squelette solide est considéré comme étant rigide et fixe. La vitesse relative $\underline{V}_r$ est donc égale à $\underline{V}_w$.

Le déplacement d'un fluide d'un point A vers un point B dans un terrain résulte d'une variation de l'énergie totale de ce fluide. L'*énergie totale du fluide par unité de volume de fluide* (notée E_w) est classiquement définie par :

$$E_w = u_w + \frac{1}{2}\rho_w V_w^2 + \rho_w g z \quad (\mathrm{J.m^{-3}}). \qquad (10.20)$$

Le premier terme u_w du second membre de cette équation est l'*énergie interne volumique du fluide*, le second terme l'*énergie cinétique* et le troisième terme l'*énergie potentielle* (avec z la cote). On remarquera ici que l'énergie interne volumique s'identifie ici à la pression du fluide. Il est souvent plus commode dans les applications pratiques d'utiliser une autre grandeur équivalente qui est l'énergie interne totale par unité d'intensité de poids volumique $\gamma_w = \rho_w g$. Cette énergie est appelée *charge hydraulique H du fluide.*

$$H = \frac{E_w}{\gamma_w} = \frac{u_w}{\gamma_w} + \frac{V_w^2}{2g} + z \quad (\mathrm{m}). \qquad (10.21)$$

Pour un fluide, cette expression est valable le long d'une ligne de courant ou pour un écoulement irrotationnel.

Remarque

Pour la majorité des problèmes géotechniques étudiés, la vitesse de filtration de l'eau à travers le milieu solide est relativement faible (typiquement bien inférieure à quelques cm/s), de sorte que l'énergie cinétique est négligeable devant les deux autres formes d'énergie.

La variation de l'énergie totale par unité de volume du fluide résulte du fait que le déplacement du fluide au sein du squelette solide produit une dissipation par frottement contre les parois du milieu et des modifications de la géométrie du réseau à travers lequel le fluide s'écoule. On parle alors de *perte de charge du fluide*.

La première loi d'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux a été établie par Darcy en 1856 [11], qui avait réalisé une série d'expériences sur une canalisation verticale remplie de sable de Saône dans laquelle il mesurait le débit d'eau et la perte de charge entre les deux extrémités de la conduite. Elle a ensuite été généralisée de sorte que la loi de Darcy s'écrit :

$$Q = -kS\frac{\Delta H}{L}, \tag{10.22}$$

où S est l'aire de la section droite du tube de courant (i.e., perpendiculaire aux lignes de courant par lequel s'écoule le fluide du tube, ΔH la perte de charge et L la longueur du tube de courant. Le coefficient k qui apparaît dans cette expression est appelé la *perméabilité hydraulique* du milieu dans la direction de l'écoulement. Ce coefficient a la dimension d'une vitesse ($\mathrm{m.s^{-1}}$). C'est une grandeur scalaire lorsque le milieu isotrope, et tensorielle lorsque le milieu est anisotrope.

À titre d'exemple, la figure 10.3 présente les résultats des expériences menées par Darcy, repris et analysés récemment par Brown [5].

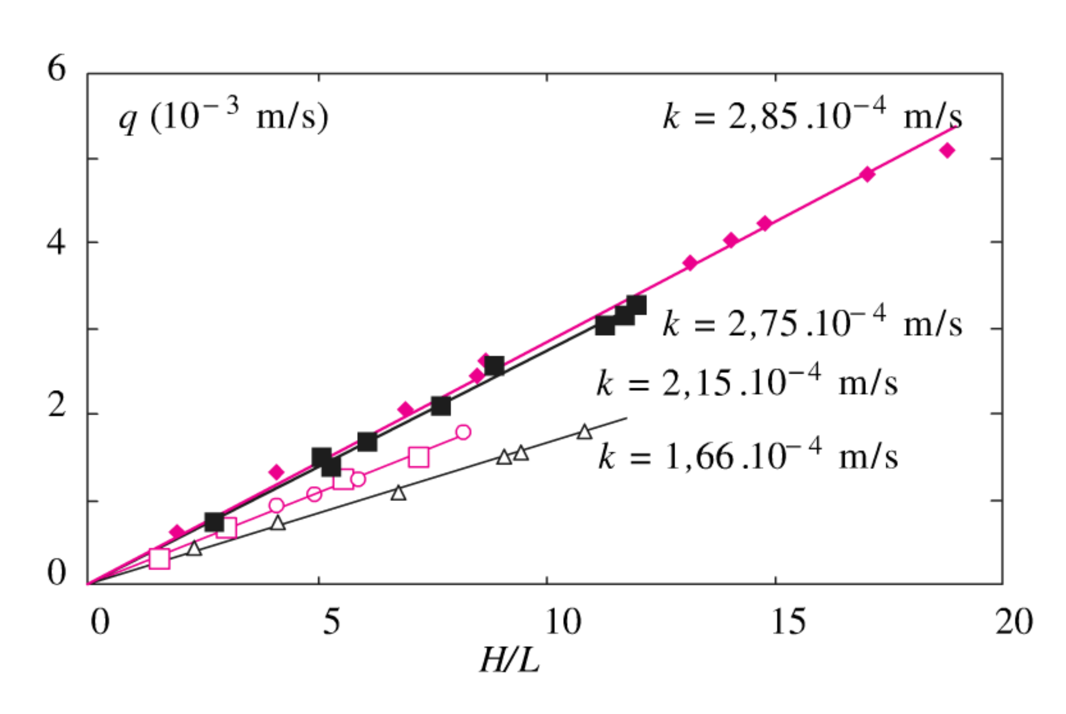


Figure 10.3 Expériences de Darcy (d'après Brown [5]).

Le tableau 10.1 regroupe les valeurs de perméabilité hydraulique de quelques sols pour fixer les ordres de grandeur. Comme on peut le constater, la plage de variation de k est très étendue. Elle varie typiquement entre 10^{-10} m.s^{-1} pour les sols les plus imperméables à 10^{-2} m.s^{-1} pour les sols drainants. Pour fixer les idées, dans un milieu de type argile dont la perméabilité hydraulique est de 10^{-8} m.s^{-1}, l'eau s'écoule avec une vitesse apparente de 30 cm par an.

Tableau 10.1 Perméabilité à l'eau des sols.

Type de sol	k (m.s^{-1})
Gravier	$10^{-1} < k < 10^{-2}$
Sable	$10^{-3} < k < 10^{-1}$
Limon	$10^{-7} < k < 10^{-3}$
Argile	$10^{-11} < k < 10^{-7}$
Roche peu fissurée	$10^{-10} < k < 10^{-8}$

Terzaghi et Peck (1948) [48] ont proposé une classification pour caractériser le degré de perméabilité hydraulique des sols (Tab. 10.2).

Tableau 10.2 Échelle de classification de la perméabilité hydraulique.

Degré de perméabilité	Intervalle de k (m.s^{-1})
Élevé	$> 10^{-3}$
Moyen	10^{-3} - 10^{-5}
Faible	10^{-5} - 10^{-7}
Très faible	10^{-7} - 10^{-9}
Quasi imperméable	$< 10^{-9}$

La vitesse du fluide qui est définie par le rapport $V = Q/S$ est la vitesse apparente du fluide (le vecteur filtration défini par l'équation 10.2). Cette loi n'est valable que dans les milieux poreux saturés, et des régimes d'écoulement laminaires obtenus lorsque l'écoulement est indépendant du temps et les vitesses d'écoulement relativement lentes (pour des nombres de Reynolds $R_e < 1$ à 2). On rappelle que le *nombre de Reynolds* est égal au rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité et est donné par l'expression suivante :

$$R_e = V\, d\, \frac{\rho_w}{\eta}, \qquad (10.23)$$

où η est la viscosité dynamique du fluide (Pa.s) et d une dimension caractéristique de la section transversale de l'écoulement (par exemple le diamètre des grains).

La perméabilité hydraulique du milieu k dépend de la nature du fluide qui circule dans le réseau poreux et n'est donc pas une grandeur intrinsèque du milieu. La *perméabilité intrinsèque* k_{int} est une propriété qui s'affranchit de l'influence des propriétés du fluide (masse volumique, viscosité) pour ne retenir que des propriétés liées à la topologie du réseau capillaire (porosité, tortuosité). Dans le cas du milieu isotrope, elle est liée à la perméabilité hydraulique par la relation :

$$k_{int} = \frac{k\, \rho_w\, g}{\eta} \qquad (10.24)$$

où η est la viscosité dynamique du fluide (Tab. 10.3). Son unité est le m^2 (ou le Pa.s).

À titre informatif, on rappelle dans le tableau 10.3 les valeurs de la masse volumique et de la viscosité et dynamique de l'air et de l'eau.

Tableau 10.3 Propriétés de l'air et de l'eau

Fluide	ρ (kg.m^{-3})	η (10^{6} Pa.s)
Eau	997	0,001
Air	1,205	18,2

La *loi de Poiseuille* qui régit l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux dans un tube circulaire de diamètre D a été établi théoriquement. Elle est appropriée pour étudier les paramètres qui influent sur la valeur de k. En effet, en première approximation, on peut considérer que le réseau poreux est constitué de tubes fins à travers lesquels s'écoule de l'eau. Cette loi est exprimée par :

$$\underline{v} = \frac{\gamma_w}{2\eta}\left(\frac{D}{4}\right)^2 \underline{\text{grad}}\, H, \tag{10.25}$$

où $\underline{v}$ est la vitesse moyenne du fluide.

Elle a la même forme que la loi de Darcy établie empiriquement (Éq. 10.22). Elle met donc bien en évidence les effets des grandeurs apparaissant dans l'expression de la perméabilité hydraulique (viscosité et masse volumique du fluide, caractéristique du réseau poreux par l'intermédiaire du diamètre D).

On peut s'en faire une idée à l'aide d'une modélisation simple (Fig. 10.4) :

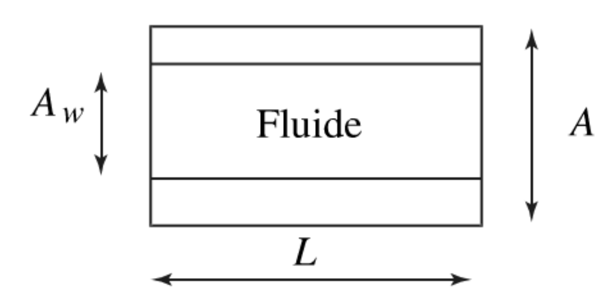


Figure 10.4 Modèle de capillaire.

Soit un élément de volume du milieu poreux vu comme un empilement de longueur L et d'aire A dans la direction perpendiculaire à l'écoulement qui s'effectue à travers l'aire A_w. L'élément de volume V est donné par $V = AL$, la porosité par $n = A_w/A$.

On définit le rayon hydraulique par $R_H/2 = A_w/\text{périmètre} = V_w/S_m$ avec S_m pour surface mouillée. Il est tel que pour un capillaire circulaire $R_H = R$. Mais : $S_m = V_s S_0$ avec S_0 surface d'échange volumique (et non spécifique). On en déduit $R_H = V_w/S_m = e/S_0$ avec e l'indice des vides.

Reprenons l'équation qui donne la valeur de la vitesse de l'écoulement local pour exprimer le débit $q = -(\gamma_w \pi R_h^4/8\eta)\,(dH/dx)$ avec $A_H = \pi R_H^2$, $A_H = nA$ et $n = e/(1+e)$. On obtient :

$$q = -\frac{\gamma_w A}{8\eta_w}\frac{1}{S_0^2}\frac{e^3}{1+e}\frac{dH}{dx}, \tag{10.26}$$

ce qui permet d'écrire l'expression de la perméabilité en divisant par A pour retrouver une loi classique de Darcy en vitesse apparente avec une perméabilité intrinsèque :

$$k = \frac{\gamma_w}{8\eta_w}\frac{1}{S_0^2}\frac{e^3}{1+e}. \tag{10.27}$$

Cette formule dite de Kozeny-Carman est très utilisée pour les sols à l'exception des sols fins (argileux) pour lesquels d'autres phénomènes électro-cinétiques interviennent. Elle permet de mettre la perméabilité en relation avec l'indice des vides. Cet indice des vides est lui-même dépendant de la sollicitation mécanique appliquée sur le sol donc de l'état de contraintes. Cet effet est intégré dans de nombreux codes de calculs. Dans cet ouvrage on conservera une perméabilité k constante car les calculs analytiques sont plus simples.

10.4 Applications

10.4.1 Mesures de la perméabilité en laboratoire

En laboratoire la perméabilité hydraulique d'un sol saturé à l'aide d'un perméamètre dont le dispositif est présenté sur la figure 10.5. Il peut être utilisé de deux manières différentes.

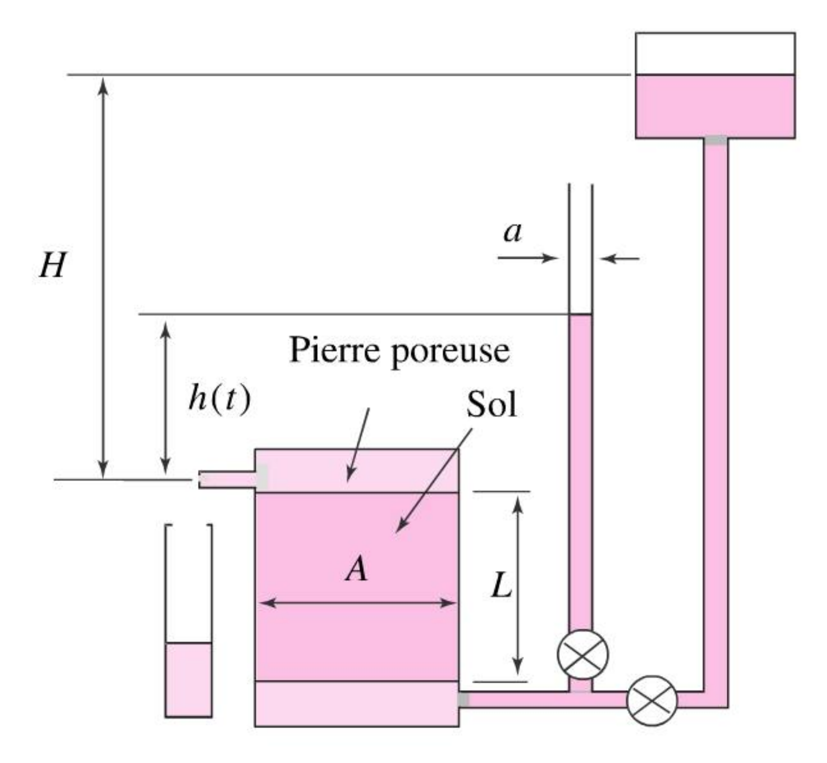


Figure 10.5 Perméamètre.

▶ *Essai de perméabilité à charge hydraulique $H =$ constante.*

Dans cette configuration d'essai, le tube fin de diamètre d est déconnecté de l'échantillon et le tube de droite connecté. La charge hydraulique est apportée par le tube de droite muni à son extrémité d'un réservoir dont le niveau d'eau est maintenu constant à la hauteur $H + L$ par rapport à la base inférieure de l'échantillon par apport régulier d'eau. La perméabilité hydraulique est identifiée à partir de l'expression suivante déduite de la loi de Darcy (avec A la section de l'éprouvette) :

$$k = \frac{QL}{AH}. \quad (10.28)$$

Cet essai est utilisé pour caractériser les sols grossiers ayant une perméabilité relativement élevée. La principale difficulté est de reproduire l'état de compacité naturelle du terrain pour que la perméabilité mesurée soit représentative de celle du sol in situ.

- *Essai de perméabilité à charge hydraulique $h(t)$ variable.*

Celui-ci est utilisé pour caractériser les sols fins à faible perméabilité pour lesquels les débits d'eau sont faibles. Le tube de droite est déconnecté de l'échantillon et le tube fin connecté. Le tube de faible diamètre d est initialement rempli d'eau jusqu'à la hauteur $h(t = 0) + L$. Au fur et à mesure de l'écoulement le niveau d'eau baisse dans le tube et la charge $h(t)$ diminue. L'expression décrite dans l'exercice ci-dessous permet d'identifier la perméabilité hydraulique.

Perméamètre à charge variable

On se propose ci-dessous d'établir la formule qui permet de déterminer la perméabilité hydraulique dans l'essai à charge hydraulique variable. On suppose que l'échantillon a été saturée au préalable et que l'écoulement est suffisamment lent pour que la loi de Darcy s'applique à chaque instant.

Solution : à un instant t donné, la variation de charge entre la partie supérieure et la partie inférieure de la couche de sol d'épaisseur L vaut $h(t)$. Le gradient hydraulique vaut donc $h(t)/L$.
Écrivons la loi de Darcy entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$: $Q = A\,V(t) = A\,kh(t)/L$ où A est la section de l'échantillon (diamètre D).
Écrivons d'autre part, l'équation de conservation de la masse : $A\,V(t)\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}h$ où a est la section du tube (diamètre d).
En combinant les deux équations et après intégration entre l'état initial (hauteur $h(t = 0)$) et l'état actuel (hauteur $h(t)$), on obtient :

$$k = \frac{aL}{A}\frac{1}{t - t_0}\ln\frac{h(t = 0)}{h(t)}. \qquad (10.29)$$

10.5 Écoulement dans un massif

La généralisation 3D de la loi de Darcy conduit à l'expression suivante :

$$\underline{V} = -\underline{\underline{k}}\ \underline{\text{grad}}\, H, \qquad (10.30)$$

où $\underline{V}$ est le *vecteur vitesse relative apparente* du fluide (solide supposé fixe) et $\underline{\underline{k}}$ est le tenseur de perméabilité hydraulique (d'ordre deux) du milieu poreux qui prend ainsi en compte le fait que le milieu peut être anisotrope.

Dans la pratique, la plupart du temps la connaissance des perméabilités hydrauliques dans la direction du litage et la direction perpendiculaire (k_h et k_v) est suffisante.

En définissant le vecteur *gradient hydraulique* :

$$\underline{i} = -\underline{\text{grad}}\, H, \qquad (10.31)$$

on obtient une autre écriture de la loi de Darcy :

$$\underline{V} = \underline{\underline{k}}\ \underline{i}. \qquad (10.32)$$

En tout point M du milieu continu, le gradient hydraulique est tangent à la ligne de courant qui passe par ce point et est orienté dans le même sens.

À cette loi, il convient de rajouter la loi de conservation de la masse du fluide qui s'écrit pour les milieux poreux saturés avec un *fluide incompressible* :

$$\text{div}\ \underline{V}_r = 0. \qquad (10.33)$$

Pour un milieu homogène et isotrope, la combinaison des deux donne *l'équation de Laplace* bien connue en électricité et en thermique :

$$\text{div}\ \underline{\text{grad}}\, H = \Delta H = 0. \qquad (10.34)$$

Remarque

1. On remarquera ici que la loi de Darcy est donnée à partir de la *vitesse apparente* et non pas de la vitesse réelle du fluide qui dépend de la porosité locale du milieu et de la longueur parcourue. La vitesse moyenne réelle du fluide s'approche de la valeur V/n où n est la porosité mais est difficile à connaître précisément. De ce fait, il est plus commode de considérer la vitesse apparente, ce qui revient à considérer une cinématique particulière où le fluide occuperait fictivement tout l'espace géométrique du volume élémentaire représentatif avec une vitesse de déplacement apparente.
2. En régime permanent on suit une particule dans son mouvement $\mathrm{d}H = \underline{\mathrm{grad}}\, H.\underline{V}_r\, \mathrm{d}t$. Donc
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -n\frac{V_r^2}{k}.$$
On obtient ainsi les pertes de charges dues aux frottements visqueux avec une formule analogue à la dissipation électrique.

10.6 Écoulement dans un sol

Pour l'étude d'un problème d'écoulement dans un terrain, la résolution de l'équation de Laplace nécessite de définir les *conditions aux limites* qui portent à la fois sur H et sa dérivée. Prenons l'exemple d'un barrage reposant sur une couche imperméable qui retient une hauteur h_{amont} d'eau alors que l'écoulement se fait en aval à la hauteur h_{aval} (Fig. 10.6). Malgré la faible perméabilité hydraulique du noyau en argile, un écoulement, certes très limité, existe au sein du barrage. Les conditions au limites doivent être précisées sur les frontières de 1 à 4.

▶ **Frontière 1**. L'eau étant supposée au repos, en tout point de la ligne 1 la charge hydraulique H définie par l'équation 10.21 est constante (la variation de la pression $P_w = u_w/\gamma_w$ est compensée par la différence d'altitude z). Cette frontière coïncide avec une *ligne équipotentielle* $H = cste = h_{amont}$.

- **Frontière 2.** La ligne 2 définit l'interface avec le substrat imperméable. La vitesse normale donnée par $\partial H/\partial n = 0$ est nulle. La frontière coïncide avec une ligne *ligne de courant*.
- **Frontière 3.** La ligne 3 définit la *surface libre* telle que $P_w = u_w/\gamma_w = 0$ (et $H = z$). Le vecteur vitesse est tangent à cette surface ce qui correspond à $\partial H/\partial n = 0$. Cette frontière est une ligne de courant qui est confondue en régime stationnaire avec la *trajectoire*.
- **Frontière 4.** En aval, l'eau étant supposée au repos, la ligne 4 est une ligne équipotentielle $H = cste = h_{aval}$.

On peut également avoir dans certains cas comme frontière une *ligne de suintement* avec des conditions mixtes : $u = 0$, $H = z$, $\dfrac{\partial H}{\partial n} \neq 0$.

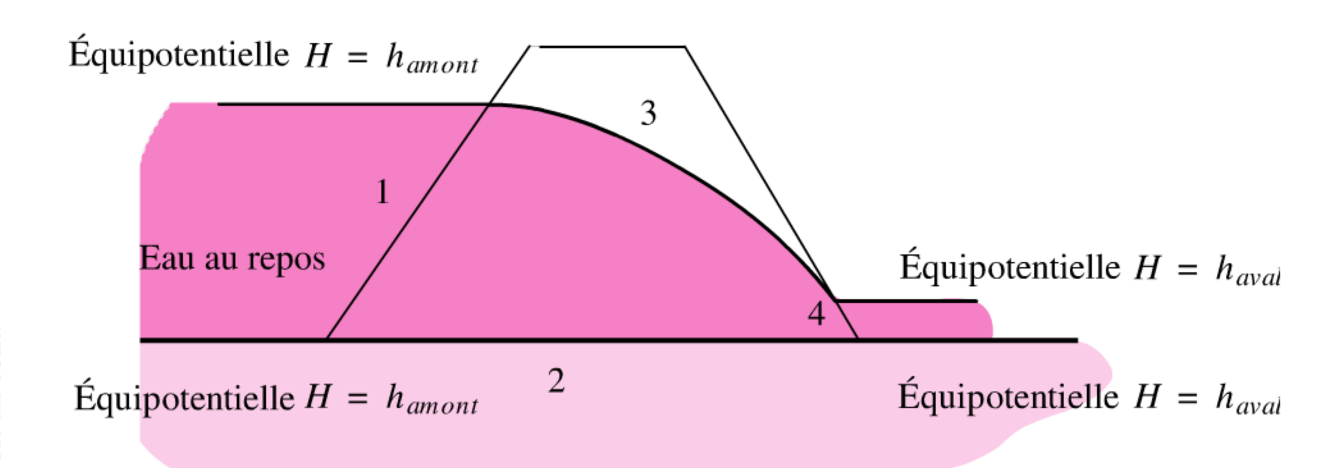


Figure 10.6 Lignes de courant et équipotentielles.

10.6.1 Calcul de débit

On a vu précédemment que les équipotentielles sont définies par les conditions $H = cste$ et les lignes de courant par les lignes intégrales du champ de vitesse. En régime stationnaire les lignes de courant se confondent avec les trajectoires des particules. Pour un sol isotrope, en tout

point M, les équipotentielles et les lignes de courant sont orthogonaux (Fig. 10.7).

Dans un écoulement plan, le débit élémentaire par unité d'épaisseur q dans *un tube de courant* délimité par deux lignes de courant et deux équipotentielles est donné par :

$$\Delta q = ka\frac{\mathrm{d}H}{b}. \tag{10.35}$$

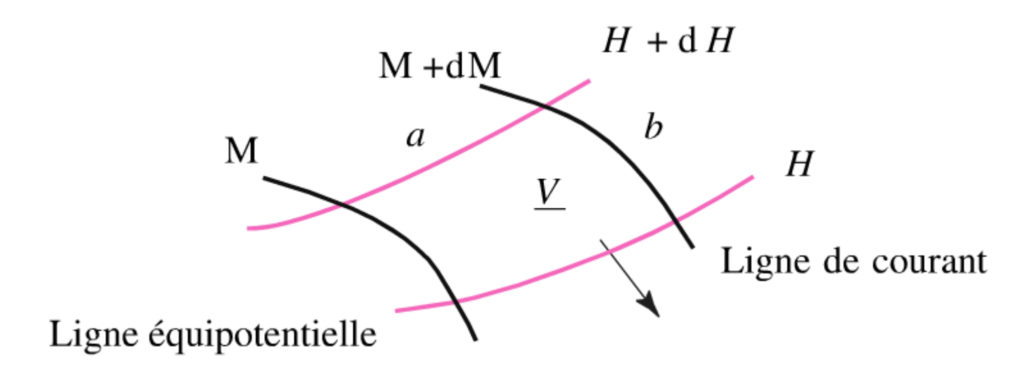


Figure 10.7 Lignes de courant et équipotentielles.

Il est alors aisé, connaissant un réseau (équipotentielle par exemple) de trouver le réseau conjugué (lignes de courant) en utilisant la propriété d'orthogonalité et, sous réserve de construire un réseau équilatère ($a = b$), de calculer le débit total par simple multiplication du débit élémentaire par le nombre de tubes de courant.

La figure 10.8 donne un exemple classique d'écoulement autour d'une palplanche. Le sol imperméable et la palplanche constituent des lignes de courant alors que la surface du sol de part et d'autre sont des lignes équipotentielles. Le réseau est un *réseau orthogonal* avec en particulier des lignes de courant qui, à la surface, arrivent perpendiculairement au sol supposé horizontal.

On peut aussi étendre l'équation de Laplace au cas des sols anisotropes par exemple dans le cas où le tenseur de perméabilité est celui d'un sol multi-couches caractérisé par une perméabilité k_h dans le plan des strates et une perméabilité k_v dans la direction perpendiculaire à ces strates. Les résultats obtenus pour un matériau isotrope peuvent être utilisés par

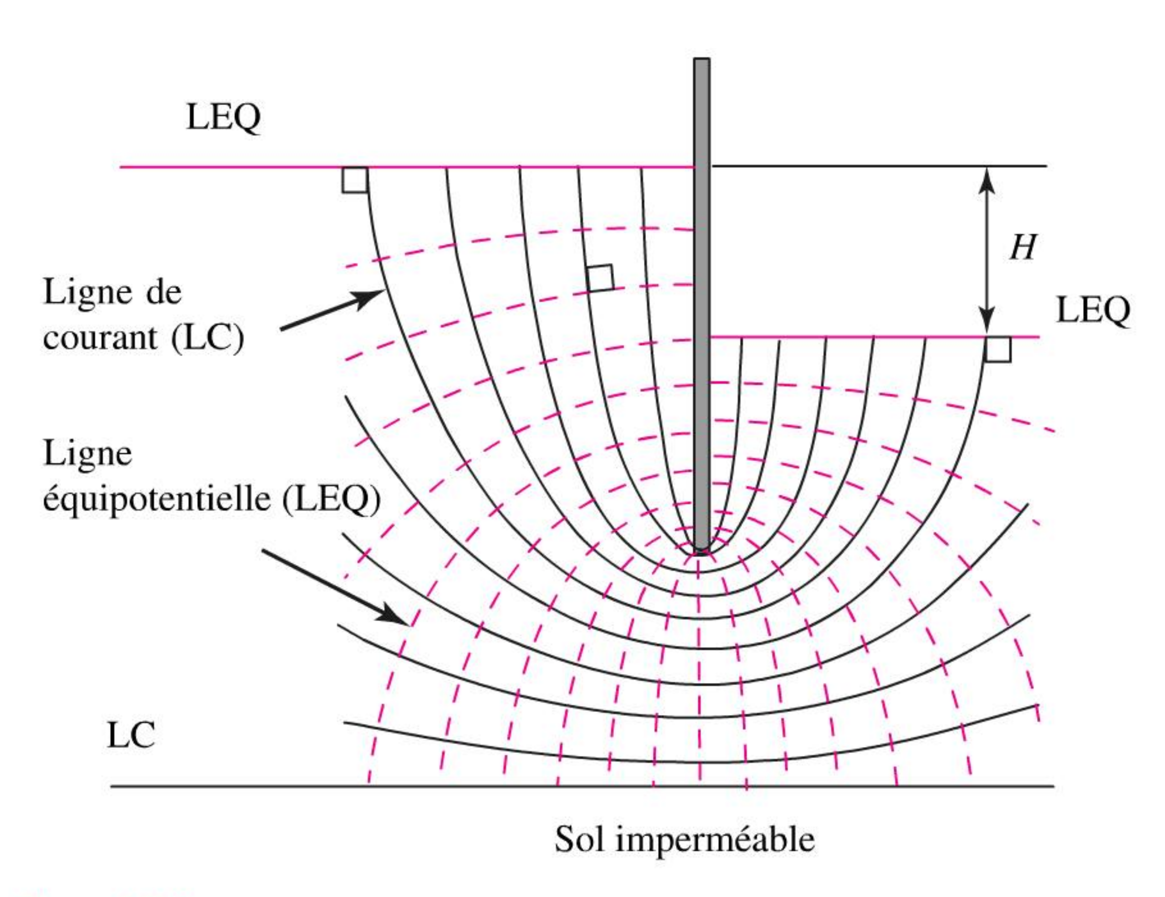


Figure 10.8 Lignes de courant et équipotentielles dans un écoulement autour d'une palplanche.

simple changement de variable en posant $X = \sqrt{k_v/k_h}\, x$. Ce cas est traité dans de nombreux ouvrages.

Tous les autres cas sont traités par calcul numérique à l'aide de codes de calcul.

10.7 Force liée à l'écoulement

Cette notion est présentée dans ce paragraphe bien que la contrainte effective n'ait pas encore été définie. Il est recommandé au lecteur qui n'est pas familier avec ce concept de lire au préalable les pages du paragraphe 11.3.3.

Lors de l'écoulement d'un fluide dans un sol, des dégâts (entraînement des particules, instabilités) sont régulièrement constatés, conséquence

d'efforts excessifs exercés par l'eau en mouvement sur le squelette solide. Reprenons l'équation d'équilibre d'un élément de volume $d\Omega_t$ soumis à la gravité.

$$\underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{g} = \underline{0}, \qquad (10.36)$$

où σ est le tenseur des contraintes totale de Cauchy.

En utilisant la définition de contrainte effective $\underline{\underline{\sigma'}}$ (en notation MS) :

$$\underline{\underline{\sigma'}} = \underline{\underline{\sigma}} - u\underline{\underline{1}}, \qquad (10.37)$$

où u est la pression interstitielle du fluide, on a :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma'}} + u\underline{\underline{1}}) + \rho \underline{g} = \underline{0}. \qquad (10.38)$$

Avec la définition de la charge hydraulique, l'équation 10.38 s'écrit :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma'}}) + \underline{\text{grad}}\,(H - z)\gamma_w + \rho \underline{g} = \underline{0}. \qquad (10.39)$$

Or comme le gradient hydraulique vaut $\underline{i} = -\underline{\text{grad}}\, H$, en l'injectant dans 10.39 on obtient :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma'}}) - \underline{i}\gamma_w - \gamma_w \underline{1} + \rho \underline{g} = \underline{0}, \qquad (10.40)$$

ou encore :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma'}}) + \gamma' \underline{g} - \underline{i}\gamma_w = \underline{0}. \qquad (10.41)$$

Dans l'équation 10.41, apparaît d'une part le *poids volumique déjaugé* $\gamma' = \rho g - \gamma_w$ qui prend en compte la poussée d'Archimède et d'autre part un terme volumique qui correspond aux efforts dus à l'écoulement. On peut les considérer, en contraintes effectives, comme des termes de chargement volumique (voir équation 8.3).

Le cas où la contrainte effective est nulle en un point du sol est un cas singulier pour lequel il est aisé de comprendre, via la relation de comporte-

ment, que cela correspond à un cas critique de déstabilisation du sol car les particules de sol sont susceptibles de se désolidariser les une des autres. Ce phénomène appelé *phénomène de Renard* apparaît lorsque $i = i_c$ avec i_c le *gradient critique* défini par :

$$i_c = \frac{\gamma'}{\gamma_w}, \tag{10.42}$$

qui, pour les valeurs numériques usuelles, est proche de 1.

Dans la pratique cet effort *lié à l'écoulement* est dirigé dans le sens de l'écoulement. Il peut donc soit stabiliser (écoulement descendant) soit déstabiliser le sol (écoulement ascendant). Il faut vérifier dans les zones de fort gradient hydraulique la *condition de Renard* qui correspond à $i_c \leqslant 1$.

10.8 Drainage, filtres

Pour améliorer les propriétés d'un sol, il est nécessaire de le drainer. La conséquence immédiate est l'apparition d'un gradient hydraulique. Sans précaution particulière, les particules fines du sol seront entraînées créant des désordres qui iront en s'amplifiant. Il faut donc interposer des filtres (géotextiles) avec des règles appelées *règles des filtres* qui mettent en relation la granulométrie du (des) filtre(s) avec celles du sol. Ce point est traité en détail dans de nombreux ouvrages de mécanique des sols.



11 Comportement mécanique des sols fins saturés

11.1 Préambule

La présence d'eau modifie sensiblement le comportement mécanique du sol. Des interactions fortes apparaissent entre la partie solide et la partie fluide qui dépendent notamment du degré de saturation du sol. On se limitera dans ce paragraphe au comportement des sols saturés. Le comportement des sols partiellement saturés faisant l'objet actuellement de nombreuses études ne sera pas abordé dans ce cours.

Lorsque les sols saturés ont une faible perméabilité, en présence d'une charge, des flux de masse de fluide se produisent en raison des différences de charge hydraulique d'un point à l'autre. On observe donc une évolution de la cinématique du sol liée aux transferts de masse. Elle induit un comportement mécanique différé (dépendant de la masse).

De plus, même en l'absence de transfert de masse de fluide, le sol saturé a un comportement différent du sol sec, qui dépend du taux de transfert de la charge extérieure sur le squelette solide.

Ce chapitre a pour objet de présenter les bases de la poro-élasticité et d'en montrer une application au travers de l'étude de la consolidation d'un sol.



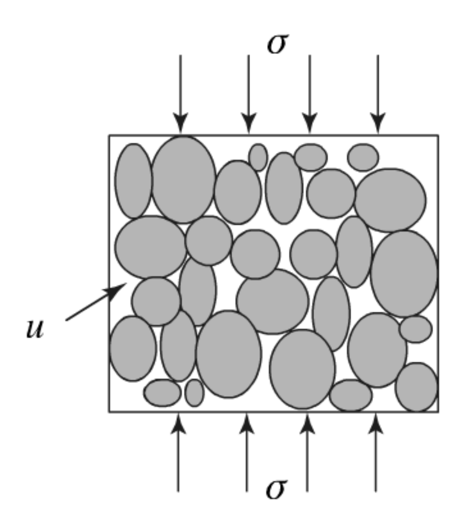


Figure 11.1 Contraintes dans un sol saturé.

11.2 Présentation de la poro-élasticité

L'objectif est de mettre en place le concept de contrainte effective et de montrer qu'il est associé au comportement du matériau. Pour faciliter sa compréhension, le modèle de Dormieux et Bourgeois, 2002 [14], est d'abord exposé en considérant le cas du milieu poreux saturé constitué d'une phase solide et d'une phase liquide avec un comportement élastique. Pour comprendre le problème de poro-élasticité, considérons dans un premier temps une sphère creuse de rayon intérieur A et extérieur B, le matériau constitutif de cette sphère (squelette pour le matériau poreux) est élastique linéaire isotrope de module de compressibilité K_s et de cisaillement μ_s.

La porosité initiale n_0 de cette sphère creuse est calculée par :

$$n_0 = \left(\frac{A}{B}\right)^3 . \tag{11.1}$$

La cavité est remplie par le fluide jusqu'à la pression P et une déformation macroscopique est appliquée sur la frontière extérieure $\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_v \underline{\underline{1}}$ par un déplacement radial imposé d_0.

On peut imaginer que cette sphère représente un élément de volume d'un milieu poreux qui échange de la matière avec ses voisins en perçant

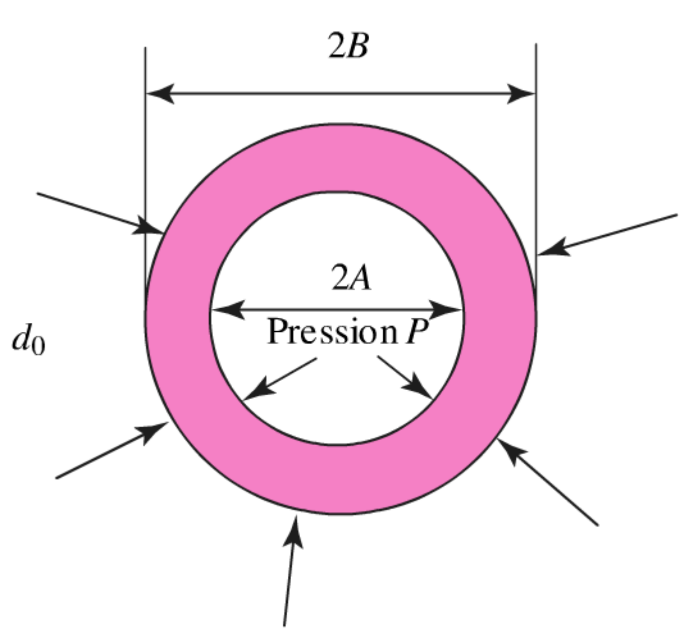


Figure 11.2 Sphère soumise à une pression interne et à un déplacement radial externe.

des petits canaux permettant le passage du fluide. Ainsi il devient possible de contrôler à la fois la déformation macroscopique fonction de d_0/B et la pression du fluide P.

La solution du problème de la sphère composite en déplacement $d(r)$ est radial et peut se mettre sous la forme $\underline{d} = d(r)\underline{e}_r$ (vecteur radial). Il est aisé de montrer (voir cours MMC) que $d(r)$ doit être de la forme $d(r) = \alpha r + \dfrac{\beta}{r^2}$ avec :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = d(r)\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{d(r)}{r}(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\phi \otimes \underline{e}_\phi). \tag{11.2}$$

Les valeurs des paramètres α et β sont déterminées par les conditions aux limites :

$$\sigma_{rr}(A) = 3\lambda_s\alpha + 2\mu(\alpha - 2\beta/A^3) = -P \; et \; \alpha + \beta/B = \epsilon_v/3, \tag{11.3}$$

avec ϵ_v représentant la déformation volumique. On calcule alors les valeurs de α et β :

$$\alpha = \frac{4\mu_s\epsilon_v/3 - Pn}{3K_s n + 4\mu_s} \text{ et } \beta = A^3\frac{P + K_s\epsilon_v}{3K_s n + 4\mu_s}. \tag{11.4}$$

On en déduit la relation entre la trace du tenseur des contraintes 3σ et la déformation volumique telle que :

$$\sigma = \sigma_{rr}(B) = K\epsilon_v - bP, \tag{11.5}$$

avec

$$K = \frac{4K_s\mu_s(1-n)}{3K_sn + 4\mu_s} \text{ et } b = n\frac{3K_s + 4\mu_s}{3K_sn + 4\mu_s}. \tag{11.6}$$

Dans ces expressions, K représente le module de compressibilité de la sphère creuse pour $P = 0$ (*module de compression drainé*) alors que b donne la valeur de la contrainte macroscopique (en $r = B$) à appliquer lorsqu'on impose une pression P de façon à annuler les déformations macroscopiques.

On peut aussi écrire que la variation de porosité est donnée par la variation relative de volume de la cavité rapportée au volume initial de la sphère :

$$n - n_0 = \frac{4\pi A^2 d(A)}{V_0}, \tag{11.7}$$

avec V_0 le volume initial de la sphère creuse. On en déduit :

$$n - n_0 = b\epsilon + \frac{P}{M}, \tag{11.8}$$

avec M *module de Biot* (homogène à un module élastique) :

$$\frac{1}{M} = \frac{3n(1-n)}{3K_sn + 4\mu_s}. \tag{11.9}$$

Il donne la valeur de la variation de volume macroscopique pour une déformation macroscopique imposée à $P = 0$.

Les équations 11.5 et 11.8 constituent *les équations du comportement en poro-élasticité* qui relient le couple $(\epsilon_v, n - n_0)$ au couple (σ, P). On constate que M et b dépendent des propriétés du squelette et de la porosité. La compressibilité du fluide n'apparaît pas en raison de la démarche adoptée en pression imposée.

11.3 Poro-élasticité

Le problème de poro-élasticité linéaire consiste à relier le couple $(\underline{\underline{\sigma}}, u)$ (nous reprenons la notation MS pour la pression interstitielle) au couple $(\underline{\underline{\epsilon}}, m_w)$. En effet on préfère utiliser l'apport de masse fluide m_w à la place de la variation de porosité. Ils sont reliés par la relation :

$$m_w/\rho_w^0 = n - n_0 + n_0\delta\rho_w/\rho_w^0,$$

où ρ_w^0 est la masse volumique initiale du fluide et $\delta\rho_w/\rho_w^0$ sa variation sous l'effet du chargement.

On généralise au cas tridimensionnel les relations de comportement établies sur la sphère creuse, et ceci en petites perturbations et température imposée.

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} & = \lambda \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}})\,\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} - bM\dfrac{m_w}{\rho_w^0}\,\underline{\underline{1}}, \\ u & = M\left(-b\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) + \dfrac{m_w}{\rho_w^0}\right), \end{cases} \tag{11.10}$$

les paramètres M et b étant les constantes de Biot pour le matériau isotrope.

Remarque

Il est possible de mettre en relation des caractéristiques élastiques identifiées sur des essais drainés avec ceux des essais non drainés. On a notamment la relation :

$$\lambda = \lambda_0 + b^2 M. \tag{11.11}$$

Les quantités mécaniques indicées $._0$ représentent les caractéristiques relatives à des essais non drainés.
Si le *solide est compressible*, on montre que le coefficient b est défini par la relation de Biot :

$$b = 1 - \frac{K_0}{K_s} \quad \text{et} \quad \frac{1}{M} = \frac{b - n_0}{K_s} + \frac{n_0}{K_{fl}}, \tag{11.12}$$



où K_0 est le module de compressibilité du sol en l'absence de variation de la pression interstitielle lors du chargement et K_{fl} le module de compressibilité du fluide.
Si le *squelette est incompressible* (hypothèse bien vérifiée pour les argiles) alors $b = 1$. Pour des roches « tendres » (craie) ce coefficient est très inférieur à 1. On peut retenir $0{,}5 - 0{,}6$ comme ordre de grandeur. Il est tout à fait possible de le mesurer par un essai en contrôlant à la fois la contrainte macroscopique appliquée et la pression du fluide. La connaissance de b est importante car avec une valeur erronée de b les estimations de tassements, par exemple dans des bassins sédimentaires, peuvent être faussées.

11.3.1 Essai non drainé

Dans cet essai, il n'y a pas de variation de la masse fluide contenue dans l'échantillon, on a donc $m_w = 0$. Les équations caractérisant le comportement s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} & = \lambda \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}})\, \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}, \\ u & = -Mb\, \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}}). \end{cases} \tag{11.13}$$

Il en résulte que $\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = 3K\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}})$. Logiquement, une variation de volume macroscopique se traduit par une variation de la pression du fluide via M et b.

11.3.2 Essai drainé

Dans cet essai, la pression interstitielle qui est maintenue constante $u = u_0$ (valeur de la pression atmosphérique en général). Prenons pour simplifier $u = 0$. On peut alors réécrire les deux équations de comportement sous la forme (λ_0 remplaçant λ) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda_0 \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}. \tag{11.14}$$

Il en résulte que :

$$\mathrm{Tr}\,(\underline{\underline{\sigma}}) = 3K_0 \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}}), \tag{11.15}$$

avec $K_0 = K - b^2 M$ une grandeur qui est relative au milieu drainé. La relation est du même type que précédemment mais le module de compressibilité est différent du cas de l'essai non drainé. On peut faire les remarques suivantes :

1. Si $\text{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) = 0$ alors $u = M m_w / \rho_{fl_0}$. L'évolution de la pression est directement donnée par la quantité de fluide qui entre ou sort du système.
2. Si $u = 0$ alors $m_w / \rho_{fl0} = b\text{Tr}\,(\underline{\underline{\epsilon}})$. La déformation macroscopique fait intervenir la quantité de fluide qui entre ou sort.
3. Si les constituants sont incompressibles, on retrouve la relation 10.18 qui s'écrit $m_w / \rho_{fl_0} = \epsilon$. On obtient bien $b = 1$.

On a donc dans ce cas de phases solides et liquides incompressibles les relations suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} & = \lambda_0 \text{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} - u\underline{\underline{1}}, \\ \epsilon & = m_w / \rho_{fl_0}. \end{cases} \tag{11.16}$$

On remarque que, le fluide étant supposé parfait (non visqueux), on ne retrouve pas de couplage entre fluide et solide sur la partie déviatorique du comportement (cisaillement, distorsion).

On montre par ailleurs que ce coefficient b est borné par les inégalités :

$$n_0 \frac{4\mu_s + 3K_s}{4\mu_s + 3n_0 K_s} \leqslant b \leqslant 1. \tag{11.17}$$

Ce coefficient est d'autant plus voisin de la borne inférieure que la porosité initiale est faible et d'autant plus proche de 1 que K_s est élevé.

11.3.3 Contraintes effectives

On peut combiner les équations de comportement (Éq. 11.10) sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} + bu\underline{\underline{1}} = \lambda_0 \text{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}}. \tag{11.18}$$

En définissant la *contrainte effective de Terzaghi* par :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + bu\underline{\underline{1}}, \tag{11.19}$$

l'équation 11.18 s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \lambda_0 \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}}. \qquad (11.20)$$

Dans le cas de phases incompressibles, on a simplement $b = 1$.

Remarques importantes

- La notation classique de Mécanique des sols consiste à écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - u\underline{\underline{1}} \qquad (11.21)$$

car les contraintes sont comptées positives en compression. La définition de la pression u du fluide quant-à elle ne change pas. Le tenseur des contraintes totales $\underline{\underline{\sigma}}$ est appliqué sur le volume élémentaire dV qui contient le solide et la partie liquide. Le fluide, en l'absence de viscosité ne peut reprendre que des contraintes sphériques hydrostatiques qui sont caractérisées par la pression interstitielle $\underline{\underline{\sigma}}^w = -u\underline{\underline{1}}$. Sur le squelette solide, s'exerce un tenseur de contraintes moyennes $\underline{\underline{\sigma}}^s$. En supposant que la contrainte globale est la moyenne des contraintes locales, on a alors :
$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^s(1-n) + n\underline{\underline{\sigma}}^{fl}$ où n est la porosité du sol.

- La définition du concept de contrainte effective *ne fait pas appel à l'équilibre* mais uniquement au comportement. La présentation courante à partir de l'équilibre est trompeuse. Elle n'est rigoureuse que sous des hypothèses très fortes, inutiles dans la présentation via le comportement. On retiendra donc que la contrainte effective est la bonne combinaison entre contraintes appliquées et pression interstitielle d'une part et déformations d'autre part via les propriétés non drainées. Cette relation particulière ne vaut que pour un comportement élastique du matériau biphasique saturé. Le lecteur intéressé trouvera dans les ouvrages ou publications récents la définition de la contrainte effective en plasticité ou pour les milieux non saturés.

11.4 Compressibilité des sols fins saturés

11.4.1 Consolidation des sols fins

La mise en situation du problème de consolidation est faite à travers l'exemple de l'édification d'un remblai par couches successives de sol fin. La figure 11.3 est extraite d'un rapport géotechnique sur l'ouvrage instrumenté. Le remblai a été réalisé au cours du temps (courbe charge en fonction du temps) avec un matériau de poids volumique de l'ordre de 20 kN.m^{-3}. Le tassement du remblai évolue puis se stabilise jusqu'à la mise en place de la couche de sol suivante où l'évolution reprend. Des sondes de pression disposées dans le sol sous le remblai indiquent une augmentation de pression juste après l'édification du remblai pour ensuite se dissiper. Si on examine les ordres de grandeur, la charge verticale appliquée par le remblai est de 80 kPa et la surpression initiale est du même ordre de grandeur (courbes inférieures).

Ce type de comportement peut être décrit en laboratoire par un *essai œdométrique*. L'échantillon cylindrique de sol fin préalablement saturé est immergé dans la cellule œdométrique qui est indéformable radialement et reste immergé durant toute la phase de chargement. Un effort axial de compression est appliqué sur la base de l'échantillon, croissant par paliers successifs – avec une durée de palier d'environ 24 heures – tout en maintenant bloquée sa surface latérale. La courbe du tassement vertical, exprimée en fonction du logarithme du temps, à l'allure indiquée sur la figure 11.4.

Durant la phase de consolidation, on distingue :

- *une phase de consolidation primaire*. Après l'application de la contrainte « verticale », comme la perméabilité hydraulique est faible et que l'eau dans la porosité n'a pas eu la possibilité de circuler, la surpression interstitielle vaut $\Delta u = \sigma$. Progressivement, cette surpression se dissipe par diffusion d'eau et le chargement imposé au squelette évolue ;
- *une phase de consolidation secondaire*. Durant cette phase, la pression interstitielle ne varie plus et $\sigma = \sigma'$. Le sol continue à se tasser par

suite du réarrangement progressif des grains. Cette consolidation plus lente est liée aux déformations visqueuses des couches absorbées en surface des grains.

Figure 11.3 Évolution du tassement et de la pression sous un remblai (d'après LCPC [24]).

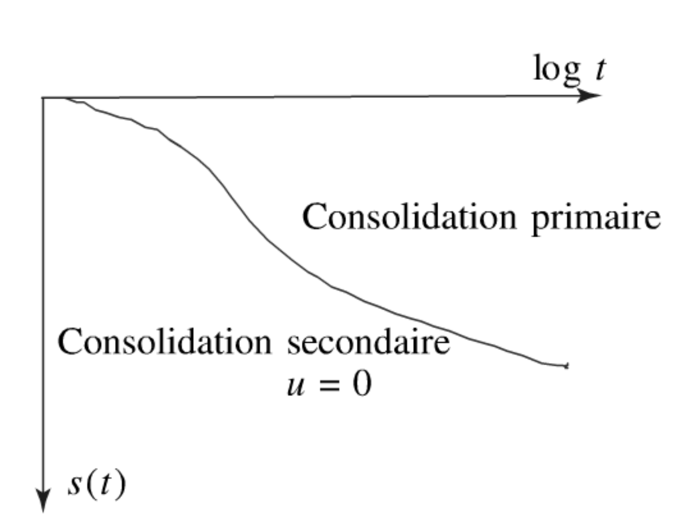


Figure 11.4 Allure du tassement d'un sol fin au cours du temps.

11.4.2 Modèle de tassement primaire de Terzaghi et Fröhlich

Le tassement primaire unidirectionnel d'un remblai a été modélisé par Terzaghi et Fröhlich à l'aide d'une analogie mécanique. Considérons un remblai d'argile reposant sur un substratum indéformable (Fig. 11.5) qui, avant la mise en place de la surcharge (c.à.d. pour les instants $t \leqslant 0$), a atteint le régime d'équilibre stationnaire. La pression du fluide au repos est alors donnée par

$$u_0(z) = \gamma_w H - z\gamma_w, \qquad (11.22)$$

en plaçant l'origine de la cote z au niveau d'interface remblai couche imperméable.

À l'instant $t = 0^+$, une surcharge $\Delta\sigma$ verticale uniforme dans le plan horizontal est instantanément appliquée en surface. Comme, la perméabilité est très faible, le fluide sous pression reprend instantanément cette charge, la pression interstitielle valant $u(z,t = 0^+) = u_0(z) + \Delta u$ avec $\Delta u = \Delta\sigma$.

Durant ce court laps de temps, la contrainte effective σ' également fonction de z ne varie pas. Comme les phases solide et du fluide sont supposés incompressibles, la couche ne s'est pas déformée.

$t \leq 0$

z

H

Argile

0

u

0 $\gamma_w H$ Roche

z

$t = 0^+$

$\Delta\sigma$

H

Argile

0

0 $\gamma_w H + \Delta\sigma$ Roche

t

$s(t)$

H

Δu

Figure 11.5 Évolution de la pression interstitielle et tassement d'une couche d'argile au cours du temps.

Pour les instants suivants ($t > 0$), un mouvement vertical de l'eau se produit car le drainage s'effectue en surface dans la direction de l'axe z. La pression interstitielle u diminue progressivement et la charge est transmise au squelette solide qui se déforme provoquant un tassement $s(t)$ de la couche de remblai qui est gouverné par l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} = \frac{k E_{\text{œdo}}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2}, \tag{11.23}$$

où $E_{\text{œdo}}$ est le *module œdométrique*, γ_w le poids volumique du fluide et k la perméabilité hydraulique.

Pour des temps très grands, la pression interstitielle rejoint sa valeur asymptotique initiale et le tassement se stabilise.

Les développements analytiques qui suivent ont pour objet de montrer la démarche à suivre pour calculer l'évolution au cours du temps de la surpression interstitielle Δu et du tassement $s(t)$.

Hypothèses

Une solution analytique simple peut être obtenue moyennant les hypothèses suivantes :

- *milieu isotrope et homogène* mécaniquement et hydrauliquement, ayant une perméabilité k et une porosité n constantes ;
- *comportement linéaire* du sol et état de type œdométrique module ($E_{\text{œdo}}$) en raison d'un chargement appliqué infini dans le plan horizontal ;
- *sol saturé et phases incompressibles* ($b = 1$) ;
- *état du sol fonction des variable z et t uniquement*. La surcharge (et la variation de pression instantanée) ne dépendent pas de la variable z ;
- *phase de mise en chargement très courte avec $\Delta\sigma_v$ imposé à l'instant* $t = 0^+$. Le temps caractéristique de la diffusion de l'eau doit être très grand vis-à-vis du temps caractéristique du chargement « instantanée » pour que la surcharge locale initiale soit identique en tout point du milieu ;
- *écoulement de fluide lent* pour négliger les forces d'inertie.

Équations du problème

Écrivons les équations du problème en précisant si elles le sont en convention (MMC ou MS) lorsque cela est nécessaire.

▶ *Conservation locale de la masse des phases fluide et solide.*

On rappelle que cette équation s'écrit (Éq. 10.11) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w^a) + \text{div}(\rho_w^a \underline{V}_w) = 0. \qquad (11.24)$$

Comme $\rho_w^a = \rho_w n_t$, avec n_t la porosité à l'instant t, sachant que ρ_w est constant (phase liquide incompressible), l'équation 11.24 se simplifie et s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_t) + \text{div}(n_t \underline{V}_w) = 0. \qquad (11.25)$$

L'équation 11.25 exprime le fait que la variation de masse n'est due qu'à celle de la porosité.

De la même manière, on obtient en écrivant la conservation de la masse du squelette (Éq. 10.10) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(1 - n_t) + \text{div}(1 - n_t)\underline{V}_s = 0. \qquad (11.26)$$

En combinant les deux équations 11.25 et 11.26 on obtient :

$$\text{div}(n_t \underline{V}_r + \underline{V}_s) = 0, \qquad (11.27)$$

où l'on rappelle que $\underline{V}_r$ est la vitesse relative de la phase liquide par rapport à la phase solide.

Étant donné que seule la variable z intervient, cette équation vectorielle se réduit à une équation scalaire :

$$\frac{\partial n_t V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_s}{\partial z} = 0. \qquad (11.28)$$

▶ *Équation d'équilibre local.*

On rappelle l'équation d'équilibre (Éq. 10.36) :

$$\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\gamma} = \underline{0}, \tag{11.29}$$

où les forces d'inertie sont négligées.

Compte tenu de la nature du problème, le champ de contrainte totale est diagonal avec $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ et σ_{zz} et est uniquement fonction de z.

Exprimant simplement la composante σ_{zz}, on a avant la surcharge :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \gamma(z - H), \tag{11.30}$$

et après chargement :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \gamma(z - H) - \Delta\sigma_v. \tag{11.31}$$

▶ *Contraintes effectives et comportement.*

Le chargement étant indépendant du temps, $\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{zz}}{\mathrm{dt}} = 0$. On en déduit que :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma'_{zz}}{\mathrm{d}t} - \frac{\Delta u(t,z)}{\mathrm{d}t} = 0 \ \ \mathrm{MS}. \tag{11.32}$$

Sachant que le comportement est œdométrique, la loi de comportement qui lie la contrainte effective à la déformation totale (Éq. 11.20) se réduit pour la composante σ_{zz} à :

$$\mathrm{d}\sigma'_{zz} = E_{\text{œdo}}\mathrm{d}\epsilon_{zz}, \tag{11.33}$$

avec $\epsilon_{zz} = \epsilon_v$.

▶ *Écoulement de type Darcy.*

La loi d'écoulement de Darcy $n_t \underline{V}_r = k\,\underline{i}$ s'exprime par :

$$n_t V_r = n_t(V_w - V_s) = -k\frac{\partial H}{\partial z}. \tag{11.34}$$



Sachant que $H = (u + \Delta u)\gamma_w + z$, l'équation 11.34 s'écrit :

$$n_t(V_w - V_s) = -k\frac{\partial H}{\partial z}\left(\frac{u + \Delta u}{\gamma_w} + z\right). \qquad (11.35)$$

La résolution devient alors possible avec les hypothèses définies préalablement.

▶ *Résolution du problème.*

□ **Équation de diffusion**

En considérant une répartition initiale u linéaire en z, la dérivation de l'équation 11.35 par rapport à z conduit à :

$$\frac{\partial n_t V_r}{\partial z} = -\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2}, \qquad (11.36)$$

équation qui combinée avec l'équation 11.28 donne :

$$\frac{\partial V_s}{\partial z} = \frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \qquad (11.37)$$

L'équation 6.24 (en notation MS) :

$$-\mathrm{Tr}\,(\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_s) = \mathrm{div}\ \underline{V}_s, \qquad (11.38)$$

associée à l'équation 11.37 conduit à (en notation MS) :

$$-\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \qquad (11.39)$$

En introduisant la relation de comportement, on en déduit que :

$$-\frac{\partial \sigma'}{\partial z} = \frac{k E_{\text{œdo}}}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad (11.40)$$

qui, compte tenu de la relation issue de la contrainte effective, devient :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{k E_{\text{œdo}}}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \qquad (11.41)$$

On aboutit finalement à l'équation suivante en combinant ces équations :

$$\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} = \frac{kE_{\text{œdo}}}{\gamma_w}\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2}. \qquad (11.42)$$

En notant $C_v = \dfrac{kE_{\text{œdo}}}{\gamma_w}$ le *coefficient de diffusivité hydraulique* appelé couramment *coefficient de consolidation*, l'équation 11.42 s'écrit :

$$\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} = C_v\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2}. \qquad (11.43)$$

Cette équation est une *équation de diffusion*.

Tassement et degré de consolidation

Le tassement $s(t)$ du sol à l'instant actuel t est calculé par intégration de la déformation ϵ_{zz} du sol sur la hauteur de la couche perméable :

$$s(t) = \int_0^h \epsilon_{zz}\mathrm{d}z. \qquad (11.44)$$

En utilisant la loi de comportement et la définition de la contrainte effective, l'équation 11.44 s'écrit :

$$s(t) = -\int_0^h \frac{\Delta\sigma_{zz} - \Delta u}{E_{\text{œdo}}}\mathrm{d}z. \qquad (11.45)$$

Une fois le tassement stabilisé (s_∞), σ_{zz} est constant sur la hauteur et Δu est nul et de ce fait l'expression 11.45 se réduit à :

$$s_\infty = h\Delta\sigma_{zz}/E_{\text{œdo}}. \qquad (11.46)$$

Le *degré de consolidation* est défini par :

$$U(\%) = \frac{s(t)}{s_\infty}. \qquad (11.47)$$

Sachant que s_∞ est donné par l'équation 11.46 et que $\Delta u_{(t=0^+)} = \Delta\sigma$ on obtient :

$$U(\%) = 1 - \frac{\frac{1}{h}\int_0^h \Delta u\mathrm{d}z}{\Delta u_{(t=0^+)}}. \qquad (11.48)$$

Équation de diffusion adimensionnelle

Rendre l'équation de diffusion (Éq. 11.43) adimensionnelle permet de résoudre le problème de tassement pour toute une classe de problèmes – chargement imposé en surface sur une couche d'épaisseur H – pour lesquels seules les conditions aux limites (drainage sur une ou deux faces) et les conditions initiales – mise en place du chargement – varieront.

Notons $\overline{z} = z/H$ l'*épaisseur adimensionnelle* et T le *temps caractéristique* de ce problème tel que $\overline{t} = t/T$. On choisit également d'adimensionner la pression interstitielle comme suit :

$$\Delta\overline{u} = \frac{\Delta u(z,t)}{\Delta u_{(t=0^+)}}. \tag{11.49}$$

L'équation de diffusion 11.43 peut s'écrire sous la forme de l'équation de diffusion adimensionnelle :

$$\frac{\partial(\Delta\overline{u})}{\partial\overline{t}} = \frac{\partial^2\Delta\overline{u}}{\partial\overline{z}^2}, \tag{11.50}$$

à condition que $\frac{t}{T} = \frac{C_v}{H^2} = T_v$, ce qui conduit à définir le temps caractéristique T.

La solution est de la forme $\Delta\overline{u} = \Delta\overline{u}(\overline{t},\overline{z})$, soit $\Delta u = \Delta u_{(t=0^+)}$ $f(t/T,z/h)$.

En reprenant l'expression du degré de consolidation on trouve une expression qui est fonction uniquement de T_v :

$$U(\%) = U(\frac{tC_v}{h^2}) = U(T_v). \tag{11.51}$$

Solution de l'équation de diffusion adimensionnelle d'une couche d'épaisseur $2H$ drainée sur ses deux faces

La solution classique pour ce problème est donnée par :

$$\Delta u = \frac{4}{\pi}\Delta\sigma\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\ \sin\frac{(2m-1)\pi z}{2H}\ \exp-\frac{(2m-1)^2C_v t}{4H^2} \tag{11.52}$$

et

$$U = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{n} \exp - \frac{n^2 T_v \pi^2}{4}. \quad (11.53)$$

On reconnaît bien la forme annoncée avec le terme $tC_v/(2H^2)$ et $z/2H$ ainsi que des sinus qui proviennent du développement de la solution en série de Fourier. Ces termes changent si le chargement diffère. La figure 11.6 donne l'allure de la courbe $U(T_v)$ dans le cas classique de changement instantané, le tableau 11.1 fournissant quant à lui quelques valeurs numériques.

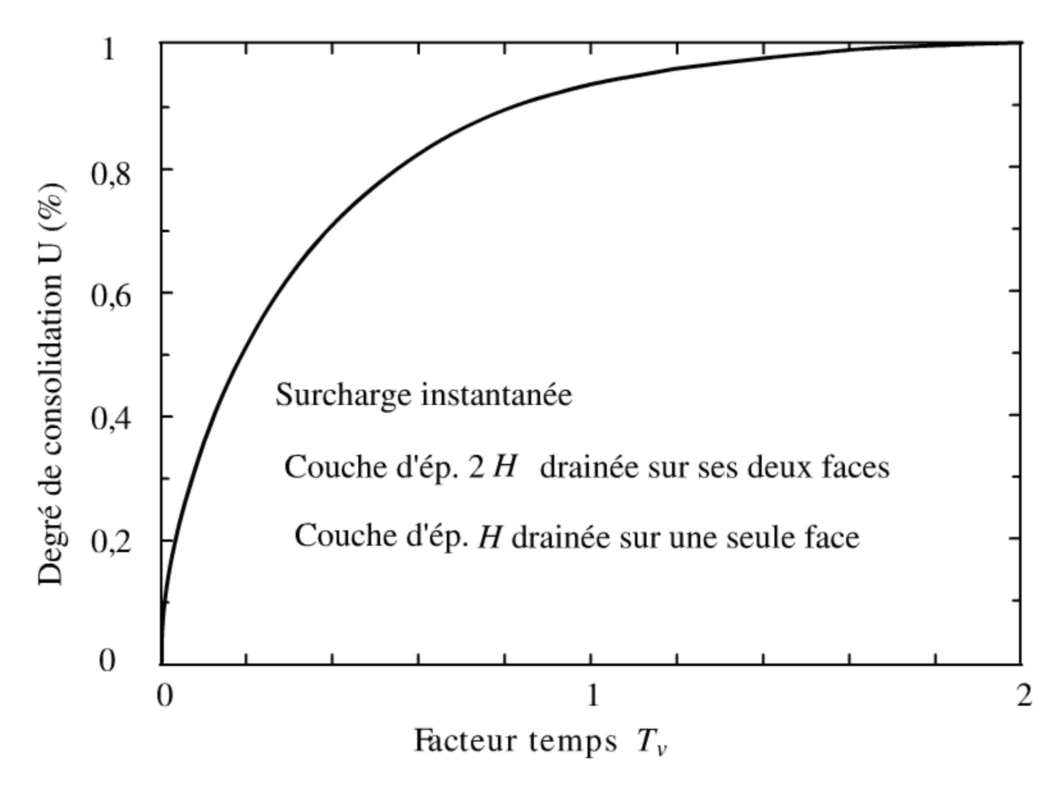


Figure 11.6 Courbe degré de consolidation en fonction du facteur temps.

Tableau 11.1 Valeur de U en fonction de T_v pour un chargement instantané et une couche drainée sur les deux faces.

U (%)	10	20	30	40	50
T_v	0,008	0,031	0,071	0,126	0,197
U (%)	60	70	80	90	95
T_v	0,287	0,403	0,567	0,848	1,163



Remarque

Il faut garder en mémoire la limite de validité des hypothèses de départ qui peuvent être mis en défaut sur le site :

– les isotropies mécanique et hydraulique du sol sont peu probables de même que son homogénéité du sol ;
– le chargement doit être étendu, ce qui signifie que les dimensions doivent être grandes vis-à-vis de l'épaisseur de la couche ;
– la solution classiquement donnée dans les ouvrages est valable pour un chargement imposé instantanément à l'instant $t = 0$. Il existe des solutions plus réalistes pour des chargements progressifs valables pour l'édification d'un remblai par exemple (voir [23]).

11.4.2 Détermination du coefficient de consolidation C_v

Au vu des résultats mis en évidence précédemment, il est évident que dans la pratique la connaissance du coefficient de consolidation permet de résoudre les problèmes de consolidation (Tab 11.2). Celui-ci peut être identifié à partir d'une courbe de tassement en fonction du temps, sur la partie de la courbe correspondant à ce mécanisme, donc ni au début car il y a mise en place du système, ni à la fin de la courbe qui risque de mettre en jeu du fluage propre du squelette.

Tableau 11.2 Coefficients de consolidation de quelques sols (d'après Schlosser [41]).

Sol	C_v (m^2.s^{-1})
Sable Argile verte de Sannoisien	83.10^{-8}
Limon d'Orly	5.10^{-6}
Vase de Martrou	8.10^{-7}
Tourbe de Bourgouin	4.10^{-7}

Application (extrait de Sanglerat et al. [40])

On réalise un remblai autoroutier de 2,40 m de hauteur sur une couche d'argile homogène saturée de 4 m d'épaisseur reposant sur un gravier sableux. La nappe se situe au-dessus du terrain naturel. On prélève un échantillon d'argile à 2 m de profondeur ($h_0 = 24$ mm) sur lequel on effectue un essai œdométrique. La teneur initial de l'argile est de $w = 69$ % et la densité des grains de 2,7. Les résultats sont consignés dans les tableaux ci-dessous.

Compression par palier de charge maintenu pendant 24 heures

Contrainte (daN/cm²)	0,05	0,1	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2
Indice des vides	1,82	1,81	1,80	1,74	1,40	0,8	0,16

Consolidation (de 0,4 à 0,8 daN/cm²)

Temps (min)	0,1	0,2	0,3	0,5	1	2,5	5
e	1,700	1,690	1,683	1,675	1,650	1,600	1,550
Temps	10	20	50	100	200	500	1 400
e	1,504	1,451	1,432	1,421	1,418	1,409	1,400

Représentez les courbes de compressibilité et de consolidation. Déterminez la valeur de la pression de consolidation, de l'indice de compressibilité et du coefficient de consolidation.

Réponses : $\sigma_p = 0{,}50$ daN/cm^2 ; $C_c = 2{,}1$; $C_v = 1{,}15\ 10^{-3}$ cm^2.s^{-1}.

11.5 Consolidation bidimensionnelle

Dans cette partie, on s'intéresse au cas pratique d'une consolidation par drainage à l'aide de puits forés dans une couche de sol afin d'accélérer cette consolidation en diminuant la distance moyenne de parcours des particules d'eau.



En suivant le même raisonnement que celui mené pour aboutir à l'équation de diffusion, le drainage radial est gouverné par l'équation suivante :

$$\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} = \frac{k E_{\text{œdo}}}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \qquad (11.54)$$

exprimée dans le système de coordonnées polaires où r représente la distance par rapport à l'axe d'un forage. La perméabilité k doit se comprendre comme k_h du matériau supposé anisotrope du point de vue hydraulique.

On note C_h le terme $\frac{k_h}{E_{\text{œdo}}} \gamma_w$.

Ce cas est plus complexe que le cas unidimensionnel car l'hypothèse d'états uniformes (pression, déformation) le long du plan horizontal ne peut plus être faite. Baron [3] a montré que pour des hypothèses de déformation (verticale due au tassement) ou de pression constante, les solutions (en termes de degré de consolidation) étaient très proches de la solution unidirectionnelle sous réserve que le rapport espacement entre puits, diamètre du puits suffisant (> 5) et que le facteur temps est supérieur à 0,1. Ces conditions correspondent à toutes les situations pratiques rencontrées. On trouvera dans tous les ouvrages classiques les degrés de consolidation en fonction du facteur temps.

E

Caractérisation expérimentale en laboratoire du comportement hydro-mécanique des sols

Le géotechnicien a besoin de connaître certaines propriétés mécaniques pour dimensionner les ouvrages souterrains, notamment :

- celles caractérisant la déformabilité du sol pour justifier les exigences des états limites de service ;
- celles caractérisant la résistance du sol pour justifier à la fois les états limites de service et ultimes.

Le comportement mécanique des sols cohérents secs (roches, argiles raides...) est le plus simple à caractériser car il est souvent du type élastique fragile. Le chargement appliqué permet de contrôler soit la contrainte totale $\underline{\underline{\sigma}}$, soit la déformation totale $\underline{\underline{\epsilon}}$, soit une combinaison de ces deux variables d'état tensorielles, qui servent à décrire le comportement du sol. Dans les sols humides, outre la contrainte totale $\underline{\underline{\sigma}}$, il est nécessaire de contrôler la pression interstitielle u qui doit être considérée comme un paramètre de chargement supplémentaire, de manière à accéder à la contrainte effective $\underline{\underline{\sigma}}'$ car cette variable d'état est utilisée pour décrire le comportement du squelette solide.

Le comportement est identifié par des essais classiques de compression simple, de traction par fendage et par flexion simple, si l'ouvrage géotechnique à construire mobilise le sol rocheux sur une faible profondeur. La caractérisation plus fine des sols dont le comportement est sensible au taux de triaxialité ou à la pression hydrostatique est faite à l'aide d'essais œdométriques, de cisaillement à la boîte de Casagrande et de compression triaxiale dans une cellule triaxiale avec contrôle de la pression de confinement.

La caractérisation du comportement des sols peu cohérents (argiles molles, sables...) est plus délicate parce qu'il est nécessaire de confiner l'échantillon dans un moule déformable avant et pendant l'essai pour le maintenir sa forme. La caractérisation des sols humides dans différents états hydriques, nécessite de réaliser des essais plus complexes, notamment des essais œdométriques et des essais triaxiaux dit UU, CD et CU avec dans le cas des essais triaxiaux la mesure en cours d'essai de la pression interstitielle, illustrés à travers quelques résultats expérimentaux récents dus à l'aimabilité de J. F. Serratrisse (L.R. d'Aix).

12 Représentativité des essais mécaniques en laboratoire

Les sollicitations mécaniques à appliquer au cours des essais pour identifier les caractéristiques mécaniques ou la loi de comportement sont très liées à la nature de l'ouvrage géotechnique à dimensionner. On conçoit aisément que les sollicitations dans le sol sous une fondation superficielle d'un bâtiment sont plus faibles que celles règnant dans le sol au voisinage de la paroi d'un tunnel creusé dans un massif rocheux. Dans le premier cas, les contraintes sont de quelques dixièmes de mégapascals, tandis que dans le second cas elles sont au moins d'un ordre de grandeur supérieur. Les états de contraintes rencontrés dans différentes situations courantes seront présentés en raisonnant simplement avec le tenseur des contraintes totales, la convention MS étant adoptée. Pour obtenir les graphes en contraintes effectives, il suffit de déduire la pression interstitielle.

▶ **État des contraintes naturelles**

En l'absence de sollicitations exercées par un ouvrage géotechnique sur un massif semi-infini, l'état des contraintes régnant en tout point M d'un sol situé à la profondeur z est caractérisé par un tenseur des contraintes diagonal $\underline{\underline{\sigma}}^0 = \sigma_h^0 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_h^0 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_v^0 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ (Fig. 12.1). La contrainte verticale $\sigma_{zz} = \sigma_h^0$ est égale au poids des terrains qui surplombent le domaine élémentaire dΩ. La contrainte normale horizontale σ_h^0, souvent indépendante de la direction dans les plans horizontaux $(x\ \ y)$, est proportionnelle à la contrainte verticale par l'intermédiaire du *facteur des terres au repos* K_0 qui peut s'exprimer en élasticité en fonction du coefficient de Poisson. Dans le plan de Mohr, cet état de contraintes est représenté par un cercle délimité par $\sigma_h^0 = K_0 \sigma_v^0$ et σ_v^0 (Fig. 12.1). On notera que le tenseur des déformations est de la forme $\underline{\underline{\epsilon}}_0 = \epsilon_v \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$.



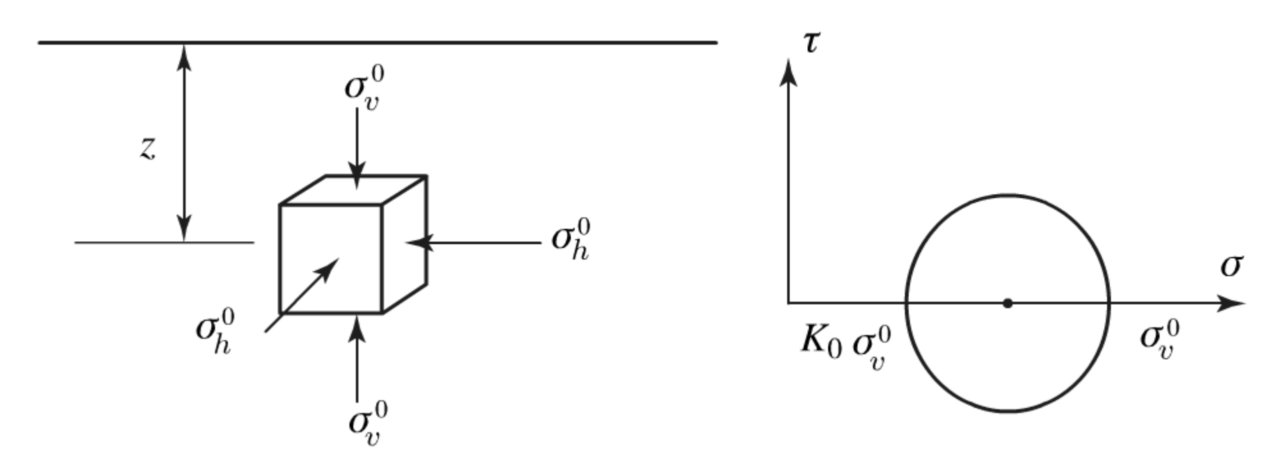


Figure 12.1 État des contraintes naturelles in situ.

État des contraintes sous un ouvrage de grandes dimensions

Lorsque les dimensions transversales de l'ouvrage sont grandes (e.g., radier reprenant la charge d'un bâtiment, remblai...) et que le terrain est sollicité de manière uniforme, dans la zone centrale de l'ouvrage le tenseur des déformations est de la forme $\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_v \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ et de ce fait la surcharge produit un accroissement des contraintes verticales et horizontales de la forme $\Delta\underline{\underline{\sigma}} = \Delta\sigma_h \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \Delta\sigma_h \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \Delta\sigma_v \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ (Fig. 12.2). Dans le plan de Mohr, cet état des contrainte se traduit par un déplacement du cercle de Mohr vers la zone de compression hydrostatique et une augmentation de la taille du cercle (Fig. 12.2).

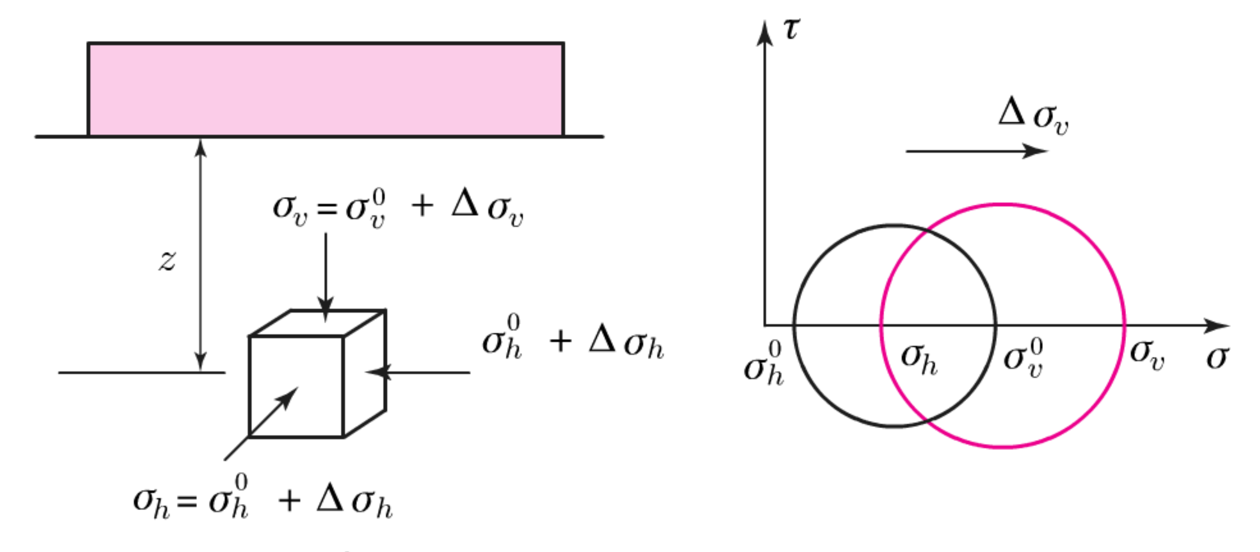


Figure 12.2 État des contraintes sous un ouvrage géotechnique de grandes dimensions.

▶ État des contraintes au voisinage d'un ouvrage de soutènement

Sous la pression des terres, un ouvrage de soutènement a naturellement tendance à se déplacer et pivoter (Fig. 12.3). Une extension horizontale et un tassement du volume élémentaire dΩ se produisent alors. La contrainte horizontale diminue d'une quantité $\sigma_h = \sigma_h^0 - \Delta\sigma_h$ tandis que la contrainte verticale due au poids des terres reste constante. Cet effet est illustré dans le plan de Mohr par l'accroissement du cercle de Mohr (Fig. 12.3).

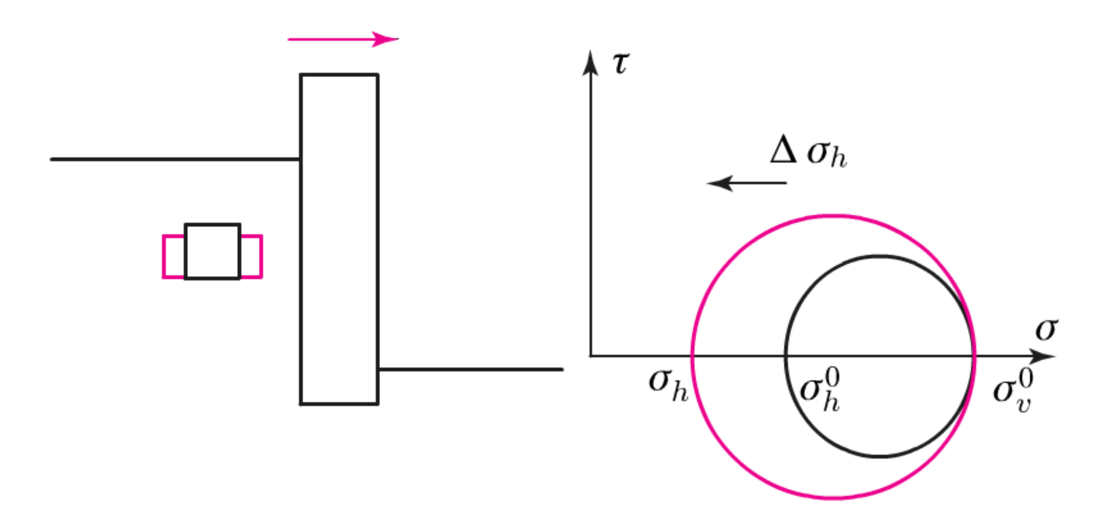


Figure 12.3 État de contraintes près d'un mur de soutènement.

▶ État des contraintes proche d'un ouvrage de soutènement avec ancrage

Si le même ouvrage de soutènement est ensuite consolidé avec des tirants d'ancrage assurant l'équilibre et limitant les déplacements, l'ouvrage se déforme dans l'autre sens lors de la mise en tension des tirants (Fig. 12.4). Le sol se contracte alors dans le plan horizontal et une expansion se produit dans la direction verticale. La contrainte horizontale augmente d'une quantité $\Delta\sigma_h$ tandis que la contrainte verticale reste constante. L'évolution du cercle de Mohr au cours de cette sollicitation est illustrée sur la figure 12.4.



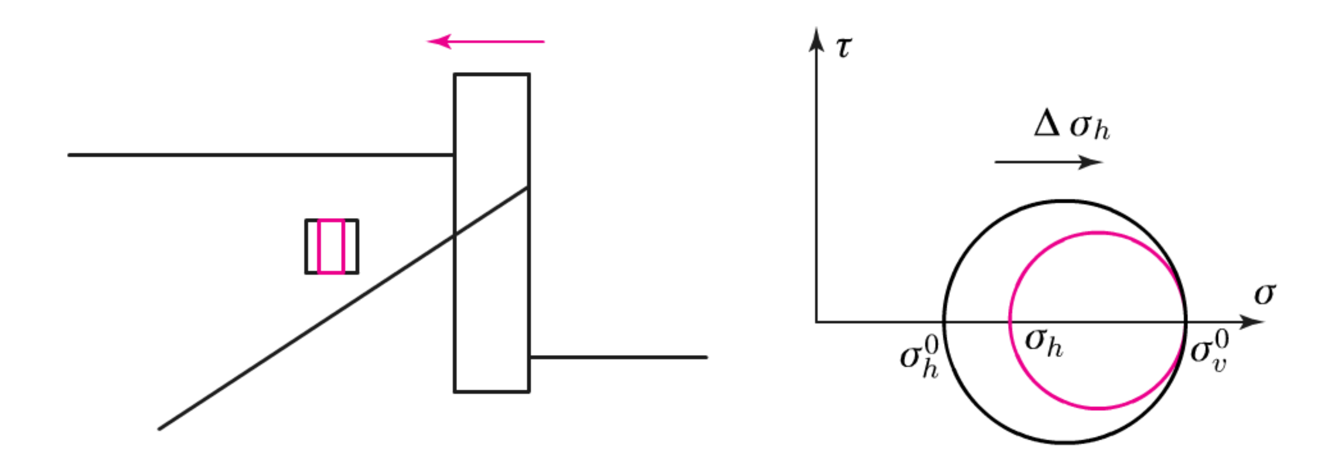


Figure 12.4 État des contraintes proche d'un mur de soutènement ancré.

▶ État des contraintes lors d'une excavation

Ce cas de sollicitation correspond à une décharge verticale. Il est symétrique de celui rencontré lorsque le terrain est sollicité par un ouvrage géotechnique de grandes dimensions (Fig. 12.5).

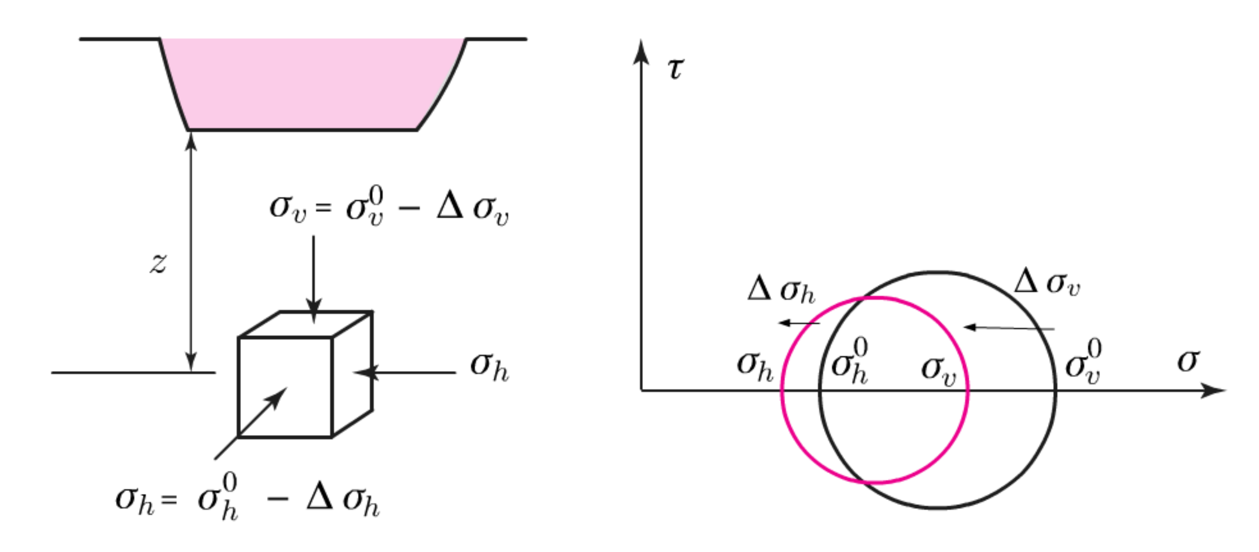


Figure 12.5 État des contraintes sous une excavation.

▶ État des contraintes dans un ouvrage géotechnique de dimensions transversales finies

Dans le sol sous le remblai ou une fondation superficielle, des modes de déformation plus complexes que celui indiqué précédemment

peuvent apparaître et, sous certaines conditions, conduire à la ruine du remblai par basculement d'un bloc de terrain le long d'une ligne de glissement (Fig. 12.6). Différents états des contraintes existent : état des contraintes de type compression confinée du sol sous l'ouvrage, de type cisaillement dans la zone proche des lignes de glissement et de type décompression confinée au loin. Des exemples d'évolution des cercles de Mohr correspond au cas de la compression confinée et du cisaillement sont représentés dans le plan de Mohr (Fig. 12.6).

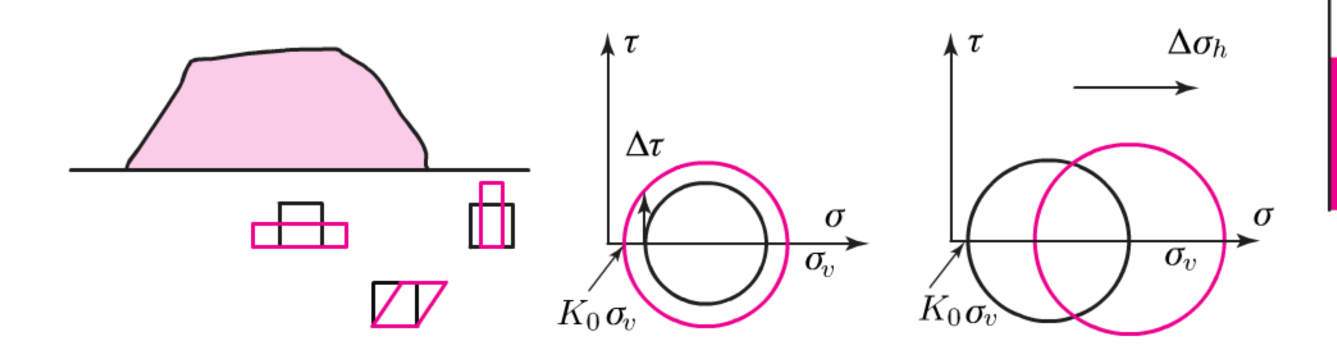


Figure 12.6 États des contrainte sous un remblai.

Dans les essais réalisés en laboratoire, les géotechniciens essayent de reproduire dans les échantillons des sollicitations proches de celles observées in situ pour caractériser le comportement mécanique des sols. La panoplie des essais mécaniques uniaxiaux et triaxiaux disponibles, avec ou sans drainage de l'eau permet de fournir les propriétés mécaniques utiles pour le dimensionnement des ouvrages géotechniques (Tab. 12.1).

L'aptitude des échantillons testés en laboratoire à reproduire un comportement proche de celui du terrain est une question centrale car la mesure des propriétés se heurte aux notions essentielles qui sont les définitions du volume élémentaire représentatif du sol (VER) et des conditions limites appliquées sur l'éprouvette.

Ainsi, les fractures présentes dans le terrain à une échelle plus grande que celle de l'échantillon prélevé échappent à l'analyse, de même que les



inhomogénéités à grande échelle spatiale du terrain induisent une variabilité des propriétés qui est difficile à quantifier. Enfin, à l'échelle spatiale de la microstructure, en raison de l'effet d'échelle, il est nécessaire de définir la dimension représentative de l'échantillon en fonction de celle de la microstructure (taille des grains) et de tenir compte de la géométrie des échantillons testés.

Tableau 12.1 Trajets de chargement dans certains essais de caractérisation mécanique (d'après Schlosser [41]).

Essai	C. isotrope	C. œdo	C. triaxiale	Cisaillement
Cont.	$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z$	$\epsilon_r = 0 ; \sigma_z$	$\sigma_r = \sigma_z = -p \ \sigma_z$	$\sigma = cste \ ; \ \tau$
Déf.	vol.	vol., dist.	dist., vol.	dist., vol.
Chargt	z, r	z, r	z, r	z, r
App.	Triaxial	Œdomètre	Triaxial	Boîte de cisail.

De même, il existe parfois un écart assez important entre la sollicitation théorique appliquée sur l'éprouvette – celle qu'on croit appliquer – et la sollicitation réelle appliquée (e.g., effet du frettage dans les essais de compression simple ou de compression triaxiale). Au-delà du soin apporté pour maîtriser les conditions aux limites, l'émergence récente des techniques de mesures de champs de déplacement par corrélation d'images permet de révolutionner les méthodes d'identification des propriétés et des modèles de comportement (Grédiac et Hild [20]).

Remarque

Les essais doivent être réalisés en gardant à l'esprit les points évoqués ci-dessus et leur impact sur la fiabilité de l'identification des lois de comportement. Des recommandations ont été faites par les sociétés savantes pour prendre en compte ces aspects et sont reprises dans les normes éditées fixant les caractéristiques des éprouvettes et les conditions expérimentales des essais de base.

13 Caractérisation sous chargement uniaxial sans contrôle de la pression interstitielle

13.1 Essai de compression simple

L'essai de compression simple (ou essai de compression non confinée) est utilisé couramment pour la caractérisation du comportement uniaxial des géomatériaux cohérents (roches et sols fins cohérents). Il est effectué sur des éprouvettes cylindriques à base circulaire (diamètre D, hauteur H) ou des éprouvettes cubiques. Elles sont généralement carottées ou taillées en prenant soin de minimiser le remaniement du sol.

Le diamètre D est généralement de l'ordre de dix fois la taille caractéristique de la microstructure et l'élancement H/D est compris entre 2 et 2,5. Cet élancement joue un rôle important parce qu'aux extrémités de l'éprouvette des forces de frottement apparaissent entre l'éprouvette et les plateaux de la presse, induisant un frettage. Ce frettage se traduit par la présence de régions côniques où l'état des contraintes n'est pas homogène et le sol est partiellement confiné. Il en résulte une surestimation de la résistance en compression simple si les cônes de frettage s'interpénètrent. C'est notamment le cas des éprouvettes cubiques d'élancement unitaire dont la résistance mesurée est supérieure à celle d'une éprouvette cylindrique d'élancement égal à 2.



L'éprouvette est posée sur le plateau d'une presse (Fig. 13.1). Un chargement en effort (F) ou en déplacement axial (δU_L) est imposé sur une des bases, tandis que l'autre base est maintenue fixe. En théorie, les champs de contraintes et de déformations sont homogènes dans l'éprouvette et valent respectivement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_L \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \text{ et } \underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_T \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \epsilon_T \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \epsilon_L \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (13.1)$$

avec $\sigma_L = F/S_0$ et $\epsilon_L = \Delta U_L/H$ si la déformation est faible ou $\sigma_L = F/S$ et $\epsilon_L = \ln((\Delta U_L + H)/H)$ si de grandes déformations apparaissent. Dans ces expressions, S_0 et S désignent respectivement la section initiale et la section actuelle de l'éprouvette déformée.

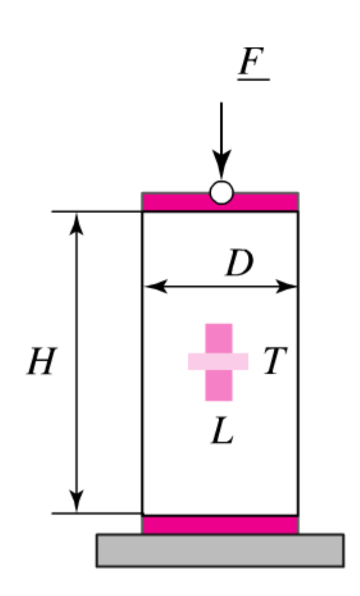


Figure 13.1 Essai de compression simple.

Des précautions doivent être prises pour obtenir des résultats fiables en minimisant les effets de bord. Les faces supérieure et inférieure de l'éprouvette doivent être rectifiées pour garantir leur planéité et leur parallélisme de sorte à supprimer la flexion parasite. Elles doivent être suffisamment lisses pour limiter le frettage. Si l'un des plateaux de la presse est rigide, l'autre doit être muni d'une rotule pour qu'un couple parasite ne soit pas introduit au cours du chargement.

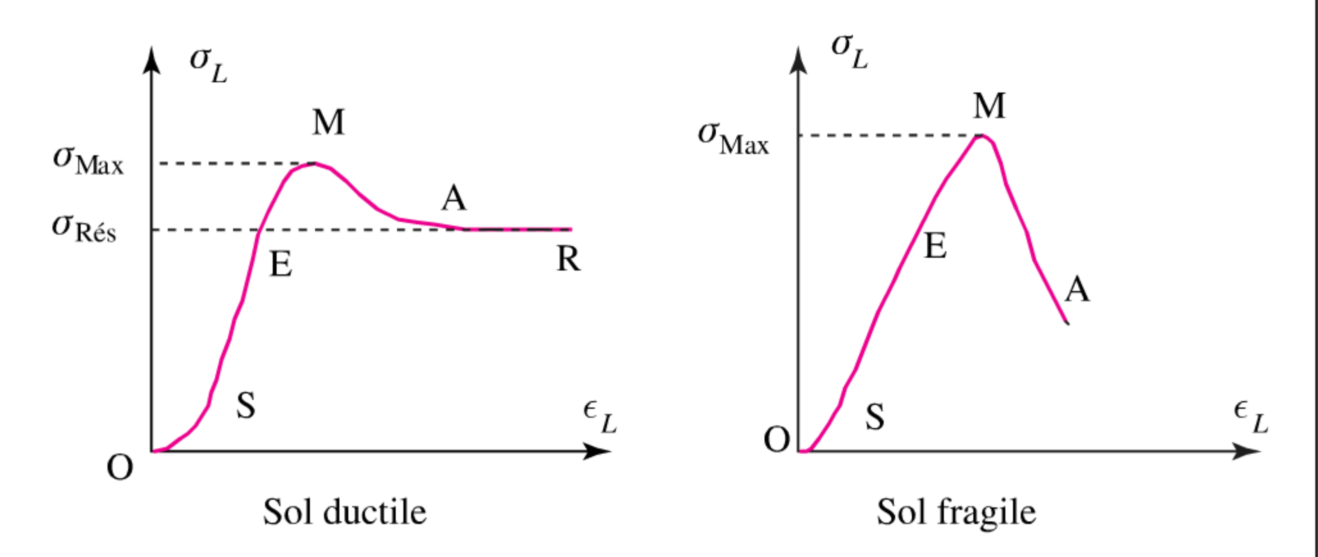


Figure 13.2 Allures typiques de comportement en compression simple (convention MS).

À partir de cet essai, on peut tracer la courbe contrainte-déformation longitudinale $\sigma_L - \epsilon_L$ (Fig. 13.2) et la courbe contrainte-déformation transversale $\sigma_L - \epsilon_T$ pour caractériser le comportement uniaxial du sol ou de la roche. En analysant la courbe $\sigma_L - \epsilon_L$, on observe plusieurs phases :

- la première phase (OS) est souvent non linéaire et correspond à la mise en place de l'éprouvette (tassements locaux) et à la fermeture de microfissures ;
- la phase qui suit (SE) est élastique ou pseudo-élastique à l'échelle macroscopique. Elle est non linéaire si les microfissures continues à se refermer ;
- la phase d'écrouissage positif (EM) traduit une augmentation de la résistance avec la déformation ou la contrainte appliquée et la présence de déformations inélastiques visibles lors des décharges. L'étendue de cette phase est quasi inexistente pour les roches et nettement plus importante pour les sols meubles ;
- la phase d'endommagement (MA) prolonge la phase précédente. Les irréversibilités sont liées à la présence de plans de glissement pseudo-plastique et l'apparition de microfissuration. Des bandes dites de

localisation apparaissent à l'intérieur desquelles les déformations, la microfissuration sont intenses (MA). À ce stade, l'éprouvette n'est plus dans un état homogène de déformations. L'identification d'un modèle de comportement intrinsèque n'a donc plus de sens ;

- la dernière phase (AR) correspond à un palier ductile visible en grandes déformations pour les sols ductiles.

À l'aide d'une instrumentation adaptée (extensométrie, ondes ultrasonores), il est possible de caractériser plus finement le comportement du sol, notamment l'anisotropie (élastique, anélastique) initiale du sol ou induite par le chargement. Il convient d'être prudent dans la manière dont ces mesures sont utilisées. Le module d'Young est notamment très sensible à la manière dont la mesure est faite. Sa valeur est plus élevée si elle est mesurée par une méthode de propagation d'ondes ultrasonores que si elle est mesurée à partir d'un essai quasi statique. De plus dans l'essai quasi statique, elle dépend de la manière d'identifier la pente de la courbe comprise entre O et E.

Le tableau 13.1 fournit quelques valeurs de propriétés mécaniques de roches. Ces valeurs sont données à titre indicatif, notamment celle concernant la résistance car dans les faits, elles sont étalées sur une plage étendue, même si l'on ne s'intéresse qu'à une seule famille de roches. Le calcaire notamment a une plage de résistance très étendue, en particulier parce que sa porosité selon les terrains varie entre 0 et 35 %.

Tableau 13.1 Caractéristiques des sols.

Nature du sol	Module d'Young (GPa)	Résistance (MPa)
Basalte	200	400
Calcaire	10	250
Granite	80	400
Grès	20	300
Marbre	40	230

D'autres propriétés peuvent être identifiées à partir d'un tel dispositif d'essais, par exemple la viscosité et l'endommagement. La viscosité (visco-élasticité, visco-plasticité) est identifiée par des essais de chargement monotone à différentes vitesses, des essais de fluage sous charge, de relaxation sous une déformation totale imposée... Nous renvoyons le lecteur vers la littérature spécialisée pour des compléments d'information.

13.2 Caractérisation du comportement en traction

La connaissance de la résistance en traction est utile dans les sols cohérents qui se trouvent notamment :

- dans un ouvrage géotechnique à faible profondeur au voisinage de la surface et dont l'action des charges appliquées par l'ouvrage génère localement un état des contraintes de type traction ;
- dans un forage où de l'écaillage peut se produire en surface du forage, à grande profondeur.

A priori, l'essai de traction est le plus simple à réaliser. Celui-ci consiste à tirer dans la direction axiale d'une éprouvette cylindrique à base circulaire carottée. La résistance en traction simple vaut $\sigma_{ts} = F_{\max}/S$ où $F_{\max}$ est la force maximale et S l'aire de la section.

Sur le plan pratique, la fixation de l'éprouvette sur le bâti de la presse est souvent problématique. L'éprouvette doit être taillée de sorte à présenter à ses extrémités une forme permettant de les agripper sur les têtes spécifiques de la presse. Une autre solution consiste à coller les extrémités de l'éprouvette directement sur les plateaux de la presse. Dans les deux cas, les conditions aux limites s'éloignent des conditions aux limites idéales et de ce fait une concentration des contraintes apparaît au voisinage des extrémités de l'éprouvette où souvent la rupture s'amorce, faussant ainsi le résultat. Cet essai est de ce fait remplacé par des essais qui génèrent une zone de traction sur une zone localisée de l'éprouvette : l'essai brésilien et l'essai de flexion trois ou quatre points (Fig. 13.3).



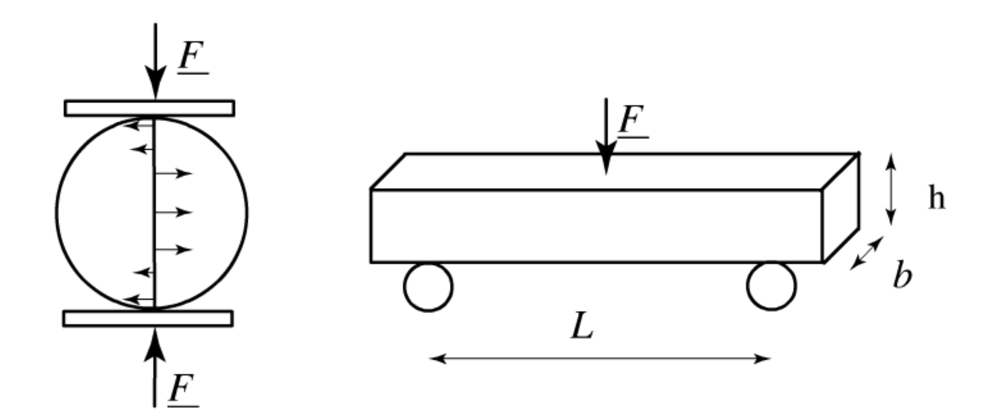


Figure 13.3 Essais de traction par fendage ou par flexion trois points.

▶ Essai de traction par fendage ou essai brésilien

Dans cet essai (Fig. 13.3), un cylindre à base circulaire (diamètre D, de longueur H) est comprimé le long d'une génératrice par un effort de compression F. L'état des contraintes sous ce chargement n'est pas uniforme. On constate que, perpendiculairement au plan diamétrial sur lequel la charge s'applique, une contrainte normale de traction apparaît sur une zone assez large. Pour les matériaux fragiles, la rupture s'opère par séparation de l'éprouvette dans ce plan. Il est alors possible d'estimer une résistance à la rupture moyenne en traction par :

$$\sigma_{tb} = \frac{2F_{\max}}{\pi D H}. \tag{13.2}$$

Depuis quelques années, les propriétés élastiques du sol peuvent également être identifiées, soit par mesures des déformations à partir de jauges de déformation collées sur la partie centrale, soit par une technique de corrélation d'images.

▶ Essai de flexion

Cet essai est également facile à mettre en œuvre. Une éprouvette prismatique, de hauteur h, de largeur b est soumise à un essai de flexion trois (éventuellement quatre points) avec une distance entre les points d'appui égale à L. Dans la zone centrale, dans les fibres inférieures situées sous la fibre neutre, le moment de flexion trois points induit une contrainte normale de traction, dont la répartition est triangulaire et de valeur maximale égale à :

$$\sigma_{tf} = \frac{6F_{\max}L}{bh^2}. \tag{13.3}$$

La résistance à la rupture en traction par flexion pour les matériaux élastiques fragiles peut être caractérisée par ce moyen.

Remarque

Il convient d'être prudent dans l'utilisation de ces formules pour identifier la résistance à la rupture par traction σ_{tr} car elle repose sur l'hypothèse d'une *rupture fragile* d'un matériau élastique non écrouissable. Même si cette hypothèse est vérifiée, des écarts sont observés entre la résistance à la rupture par traction simple, traction par fendage et traction par flexion, les deux dernières étant souvent supérieures. Ces écarts liés à la présence de défauts et à l'hétérogénéité des contraintes peuvent être interprétés par une approche statistique de type Weibull.

13.3 Essai œdométrique

L'essai œdométrique est un essai de compression confiné destiné aux sols non cohérents ou sols fins cohérents dont la sollicitation appliquée est proche de celle décrite pour les ouvrages de grandes dimensions transversales. Cet essai est réalisé sur un échantillon cylindrique de diamètre D carotté et placé dans un moule cylindrique de même diamètre et de hauteur H sensiblement égal à la moitié du diamètre (Fig. 13.4). Ce moule en acier est suffisamment épais pour qu'il ne se déforme pas sous la pression latérale appliquée par l'échantillon au cours du chargement. Les pierres poreuses rigides placées en faces supérieure et inférieure permettent de drainer l'échantillon en cas de présence d'eau. Le sol fin testé est soit sec, soit humide et dans ce dernier cas complètement saturé avant sa mise en charge.

Le chargement en compression consiste à réaliser une suite d'incréments de charge ΔF_i – croissants avec une raison géométrique – appliqués instantanément et maintenus sur une durée plus ou moins longue en fonc-



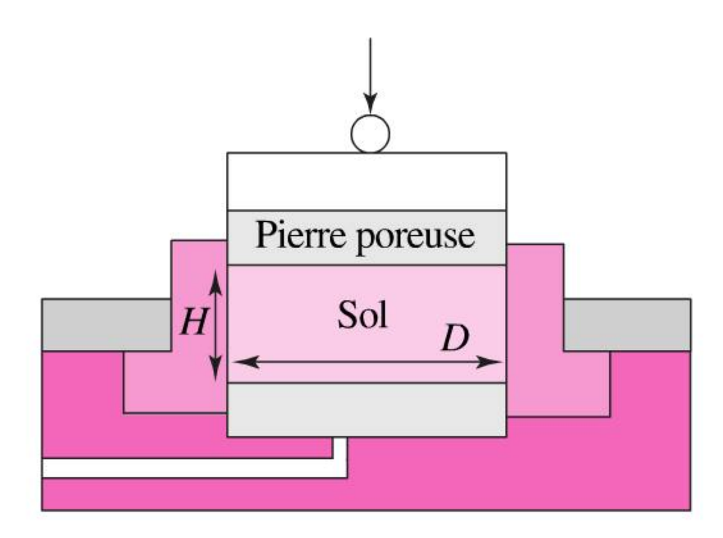


Figure 13.4 Schéma d'un œdomètre.

tion de la nature du matériau. On relève alors à chaque phase l'évolution du tassement $\Delta H_i(t)$ au cours du temps t. Le tassement total vaut alors $\Delta H(t) = \sum \Delta H_i$. Les décharges progressives à différents niveaux de compression permettent de connaître l'évolution de l'état du sol au cours du chargement.

Sous la charge axiale, l'échantillon de sol compressible se tasse sans se déformer latéralement. Cette compressibilité est liée à la diminution de la porosité du milieu poreux – la compressibilité des grains constituant le squelette étant souvent négligeable – par réarrangement granulaire lié ou non au départ d'eau.

La courbe brute $F - \Delta H$ avec le tassement $\Delta H \geqslant 0$ est ensuite convertie en une courbe avec la contrainte σ en abscisse (en échelle logarithmique décimale) et l'indice des vides e en ordonnée. On a alors :

$$\sigma = \frac{4F}{\pi D^2} \quad \text{et} \quad e = e_0 - \frac{1 + e_0}{H} \Delta H \tag{13.4}$$

avec e_0 l'indice des vides initial.

L'évolution de $\Delta H_i(t)$ pour un incrément de charge donné ΔF_i permet de distinguer trois phases :

- **un tassement initial**. Il se produit instantanément lors de l'application de l'incrément ΔF_i et avant l'amorçage du drainage. Il est dû à de petits mouvements de grains, à la compressibilité de petites poches gazeuses qui n'ont pas été éliminées lors de la saturation des échantillons humides et, pour une part minime, à la compressibilité des grains solides ;
- **une consolidation primaire**. Ce phénomène dissipatif qui est dépendant du temps est dû au drainage progressif de l'eau qui s'évacue à travers les pierres poreuses, jusqu'à l'annulation de la surpression interstitielle de l'eau. Nous renvoyons le lecteur au chapitre traitant de la consolidation pour une description et une modélisation fine de ce phénomène ;
- **une consolidation secondaire**. Après élimination de la surpression interstitielle, le tassement se poursuit car les grains du squelette continuent de se réorganiser jusqu'à ce qu'un nouvel état microstructurel stable soit atteint.

De cette courbe, il est possible de déduire le coefficient de consolidation C_v qui vaut :

$$C_v = \frac{T_v h^2}{t}, \tag{13.5}$$

par la méthode de Taylor ou par la méthode de Casagrande décrites dans la norme.

À titre illustratif, on présente sur la figure 13.5 les courbes expérimentales $e - \sigma$ obtenues sur deux sables secs.

La phase primaire observée à chaque incrément de charge d'un essai sur une argile saturée n'existe pas. L'indice des vides pour chaque palier correspond à l'indice des vides final atteint. On remarque que dès l'application d'un chargement une « pseudo-plasticité macroscopique » apparaît révélée par les décharges-recharges pseudo-élastiques. Dans l'exemple de la figure 13.5, l'essai débute sur le sable lâche dont l'indice des vides initial est de 0,87. Après la première décharge, l'indice des vides est plus

faible et vaut environ 0,8, ce qui correspond à une déformation permanente volumique de contraction de 5 %. Au fur et à mesure que le chargement se poursuit, les déformations anélastiques croissent de moins en moins vite jusqu'à devenir quasi nulle lorsque la consolidation est complète, i.e., la porosité atteint une valeur asymptote. Pour compacter davantage le sol, il est nécessaire de briser les grains pour modifier la répartition de la granulométrie du sol.

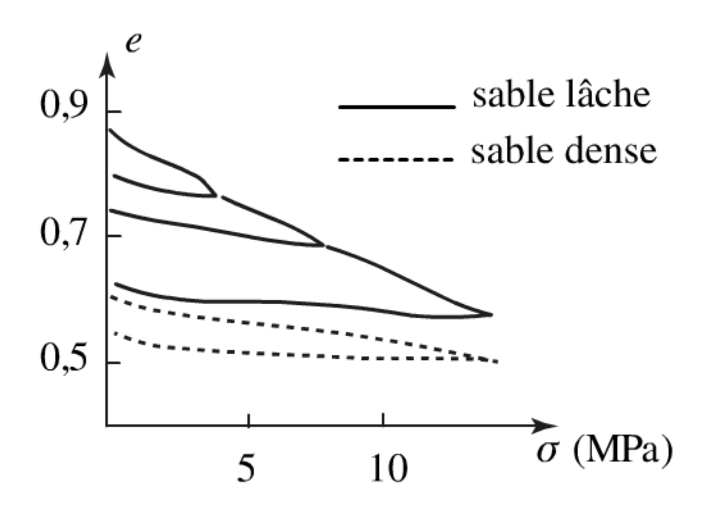


Figure 13.5 Résultat d'essais œdométriques sur un sable (d'après Lee et Seed [25]).

De ces courbes les grandeurs suivantes sont déduites : l'indice des vides initial e_0, l'indice de recompression C_s, l'indice de compression C_c et la contrainte de préconsolidation σ'_p. L'indice de recompression C_s est la pente de la partie de la courbe sensiblement linéaire dans la phase de recharge qui suit la décharge. L'indice de compression C_c est la pente de la partie sensiblement linéaire de la courbe enveloppe, c'est-à-dire celle que l'on obtiendrait en l'absence de décharge. Enfin la contrainte de préconsolidation σ'_p est identifiée à partir du point d'intersection entre la première droite de chargement et la droite définissant la pente C_c. Les détails sur l'identification de ces paramètres sont précisés dans la norme.

De nombreux résultats expérimentaux montrent que l'élasticité est fortement non linéaire pour les argiles et les sables. Cela peut s'interpréter par l'existence de multiples contacts entre les grains. La loi de Hertz peut être

utilisée pour obtenir la forme de la dépendance du module d'Young E avec le chargement.

Il convient également de garder en mémoire que l'élasticité des sols est généralement anisotrope. Cette anisotropie peut être faible dans certains sols et très marquée dans d'autres cas, en fonction de la nature des sols et des sollicitations qu'ils ont subies au cours de leur histoire. À titre d'exemple, la figure 13.6 illustre l'effet d'anisotropie élastique sur des sols pulvérulents dont initialement la microstructure était isotrope et dont l'élasticité est devenue anisotrope par suite du chargement appliqué qui a induit un réarrangement granulaire.

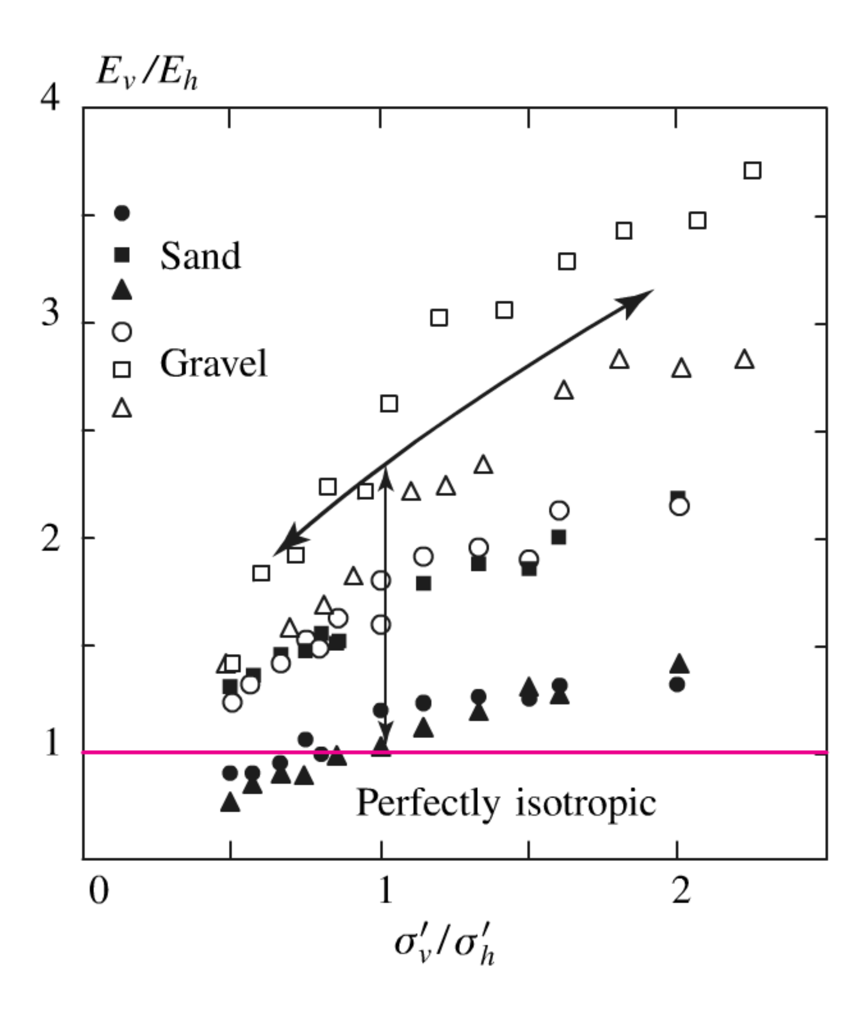


Figure 13.6 Évolution du module d'Young en fonction de la contrainte appliquée (d'après Tatsuoka [46]).

14 Caractérisation sous chargement multiaxial sans contrôle de la pression interstitielle

14.1 Essai de cisaillement direct

L'essai à la boîte de cisaillement est l'essai le plus ancien pratiqué en mécanique des sols (Fig. 14.1). C'est un essai où le chargement est multidirectionnel dans la mesure où la sollicitation de cisaillement peut être réalisé à différents niveaux de confinement. C'est donc en quelque sorte l'ancêtre des essais multiaxiaux, même si aujourd'hui son domaine d'utilisation se limite à la caractérisation du comportement à la rupture du sol. L'essai peut être effectué sur des roches ou des sols meubles peu ou non cohérents, secs ou saturés.

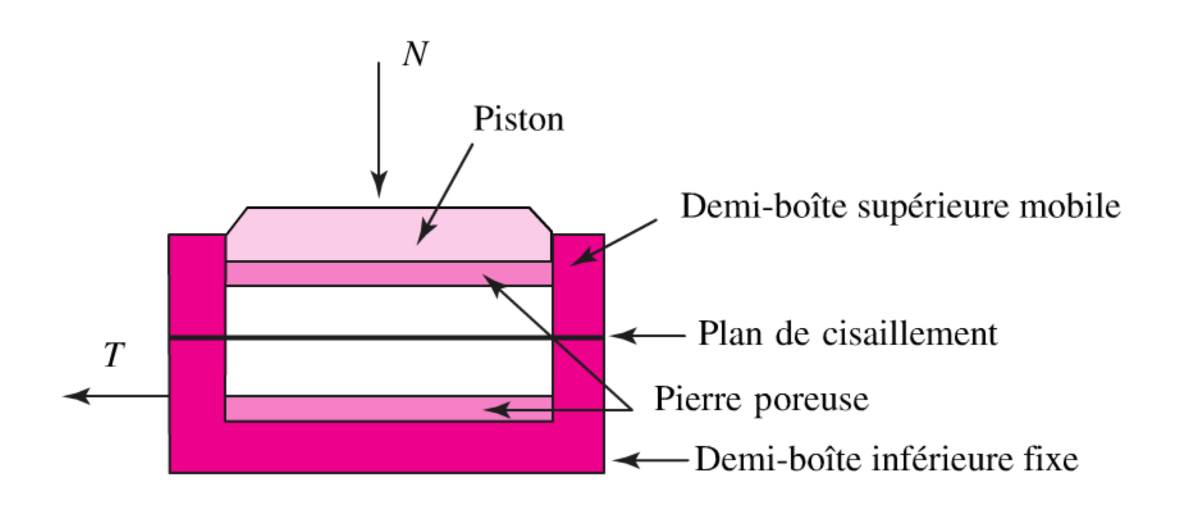


Figure 14.1 Essai de cisaillement direct à la boîte de Casagrande.

L'essai de cisaillement direct est très facile et rapide à mettre en oeuvre. Dans le cas d'un sol non cohérent comme le sable, l'échantillon de section circulaire (diamètre D) ou carré de coté L et de faible hauteur H est fabriqué sur place en confinant le sol dans la boîte de Casagrande. Dans le cas d'un sol cohérent comme une argile ou une roche, l'échantillon est obtenu par découpe ou carrotage puis placé dans la boîte de Casagrande.

Le porte-échantillon est constitué de deux demi-boîtes de section circulaire ou carrée dans lesquelles l'échantillon est placé entre deux pierres ou plaques poreuses si le sol est saturé en eau. Une force normale constante N est appliquée à la section cisaillée sur la partie supérieure de l'échantillon qui crée une contrainte normale σ constante. Dans le cas des matériaux saturés en eau, l'échantillon peut être consolidé avant le début de l'essai. Une action horizontale est ensuite appliquée T en imposant un déplacement horizontal relatif U_T des deux demi-boîtes à vitesse imposée. En raison de la résistance du sol, la force T génère sur le plan de cisaillement une contrainte tangentielle τ. En première approximation, les contraintes normale et tangentielle sont constantes et on a en adoptant la convention MS :

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{T}{S} \tag{14.1}$$

avec $S = \pi D^2/4$ ou $S = L^2$ selon que la section est circulaire ou rectangulaire dans la configuration initiale.

En réalisant différents essais avec différentes forces N_i fixées, certains traits de caractère du comportement mécanique peuvent être appréhendés par la mesure des grandeurs suivantes : force T, tassement vertical U_N et déplacement horizontal U_T (Fig. 14.2).

Pour calculer la valeur maximale de τ^i_{max}, à partir du chargement appliqué N_i, il est nécessaire de calculer la surface nette de sol cisaillé. Elle est plus petite que la surface initiale en raison du grand déplacement latéral observé. Dans la pratique, cette correction n'est pas faite (voir norme associée à cet essai).

Si l'on souhaite déterminer la résistance résiduelle, on impose généralement le chargement en cisaillement par l'intermédiaire d'un déplace-

ment horizontal alterné jusqu'à ce que T atteigne la valeur résiduelle T^i_{res} pour éviter les grands déplacements.

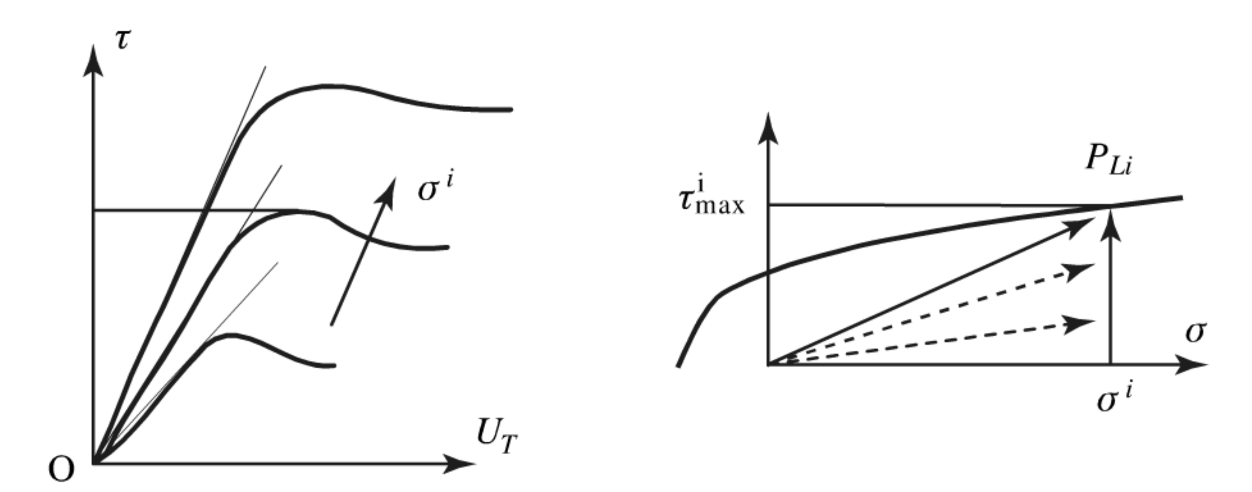


Figure 14.2 Évolution de la contrainte de cisaillement en fonction du déplacement et représentation d'un essai *i* dans le plan de Mohr et la courbe intrinsèque de rupture.

L'ensemble des points limites $P_{Li}(\sigma_i, \tau^i_{max})$ (respectivement $P_{Ri}(\sigma_i, \tau^i_{res})$) obtenus pour différentes valeurs de la contrainte normale σ^i permet de construire la *courbe intrinsèque de rupture* (respectivement *courbe de résistance résiduelle*).

Remarques

1. Dans cet essai les directions principales des contraintes (et des déformations) tournent lors de l'application de la contrainte de cisaillement, ce qui n'est pas le cas dans l'essai triaxial présenté plus loin.

2. Différents types d'essais peuvent être réalisés sur les argiles saturées :
   – des essais non consolidés, non drainés dits UU dans lesquels le chargement en cisaillement est effectué juste après l'application de la force N et à des vitesses suffisamment rapides ;
   – des essais consolidés, non drainés dits CU dans lesquels le chargement en cisaillement est effectué après une période d'attente suffisamment longue après l'application de la force N pour que le sol soit consolidé et à des vitesses suffisamment rapides ;

Remarques (suite)

– des essais consolidés et drainés dits CD dans lesquels le chargement en cisaillement est effectué après une période d'attente suffisamment longue après l'application de la force N pour que le sol se soit consolidé et à des vitesses très lentes pour qu'il n'y ait pratiquement pas de surpression interstitielle durant de la phase de chargement en cisaillement.

La déformation tangente réelle est difficile à appréhender car le sol est sollicité en cisaillement sur une épaisseur sensiblement plus faible que la hauteur de l'échantillon. On peut définir une déformation tangentielle nominale comme le rapport $\epsilon_T = \Delta U_T/H$. De même, la déformation normale, qui n'a de signification physique claire que dans la phase d'application de la force N, peut être définie par $\epsilon_N = \Delta U_L/H$. On peut alors tracer différentes courbes qui fournissent de précieuses informations sur le comportement en rupture.

À titre d'exemple, la figure 14.3 illustre à travers plusieurs graphes le comportement de deux sols pulvérulents limites : un sable sec dense et un sable sec lâche. Le tracé $\tau - \epsilon_T$ révèle que la résistance en cisaillement du sable lâche est atteinte en fin de chargement. Comme le montre le graphe $\epsilon_L - \epsilon_T$, le sable continue à se consolider sur toute la phase de chargement car les grains se réorientent et remplissent la porosité. La résistance en cisaillement du sable plus dense atteint une valeur maximale avant de diminuer. Cette résistance maximale est atteinte lorsque la compacité maximale est atteinte. La chute de résistance s'explique par le fait que dans la zone du sol cisaillé, la porosité croît pour que les grains puissent se déplacer localement. On parle de *dilatance* plastique du sol. Dans les deux cas, l'indice des vides après cisaillement tend vers la même asymptote, comme l'illustre le graphe $e - \epsilon_T$. En reportant sur le graphe $\tau - \sigma$ les points $P_{Li}(\sigma_i, \tau^i_{max})$ correspondant à la rupture des sables on constate que la courbe intrinsèque de rupture du sable est sensiblement linéaire et peut être décrite par un critère de type Mohr-Coulomb. Le même constat pourrait être fait en traçant les courbes intrinsèques de résistance résiduelle pour les deux sols pulvérulents.

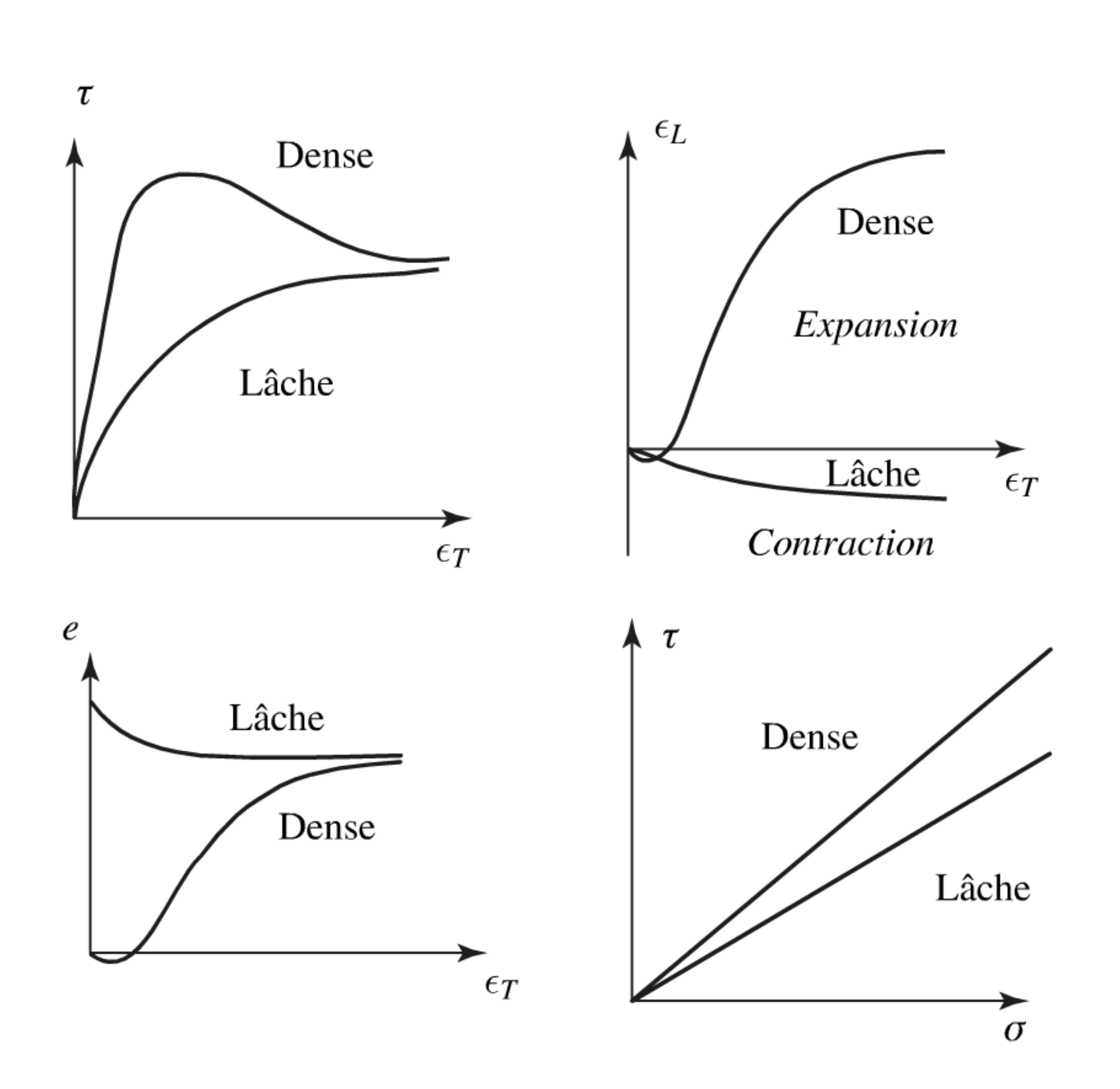


Figure 14.3 Allures de courbes issues de l'essai à la boîte de Casagrande.

14.2 Caractérisation du comportement triaxial

L'essai triaxial peut être vu comme une extension de l'essai de compression simple pour caractériser le comportement triaxial du matériau. L'essai est réalisé sur une éprouvette de sol cylindrique de diamètre D et de hauteur H, d'élancement H/D voisin de 2 (Fig. 14.4 et 14.5).



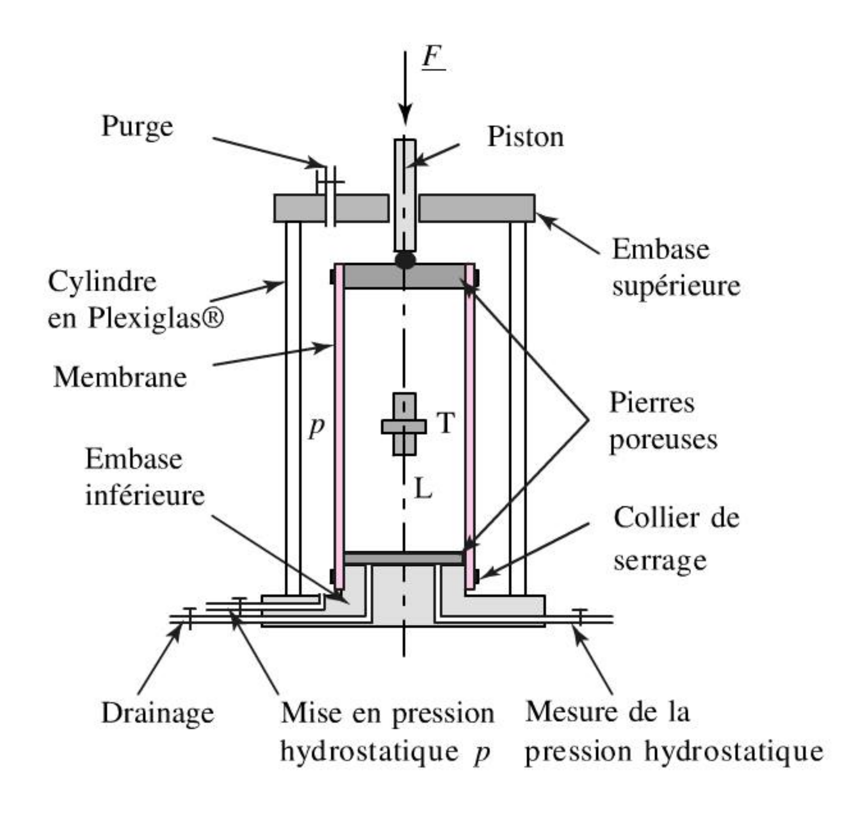


Figure 14.4 Schéma du dispositif de l'essai triaxial.



Figure 14.5 Photo d'une cellule triaxiale
(extrait de Reiffsteck [34]).

Une membrane en caoutchouc entourant l'échantillon empèche la pénétration de l'eau dans la porosité du sol. De plus, dans le cas des sols non cohérents, la membrane mise en place dans le moule permet d'assurer la cohésion de l'échantillon après fabrication.

Pour l'étude des sols, des disques en pierre poreuse sont placés entre les faces supérieure et inférieure de l'éprouvette et les embases de la machine d'essai pour assurer le drainage.

Dans sa version de base – sans contrôle de la pression interstitielle u –, l'essai consiste à appliquer sur l'éprouvette une contrainte radiale σ_r et une contrainte axiale σ_a.

Le tenseurs des contraintes est alors de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_r \left(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2\right) + \sigma_a \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3, \qquad (14.2)$$

et le champ des déformations s'écrit :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_r \left(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2\right) + \epsilon_a \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3, \qquad (14.3)$$

La sollicitation mécanique est généralement appliquée en deux phases dans les essais usuels de mécanique des sols et des roches (convention MS) :

- dans une première phase, l'échantillon est soumis à une *pression hydrostatique* d'intensité $\sigma_r = \sigma_a = p_f$ où p_f est la pression appliquée sur l'éprouvette ;
- dans la seconde phase, une *contrainte déviatorique* $\sigma_a - \sigma_r$ est générée dans l'éprouvette en augmentant la contrainte axiale de compression par l'intermédiaire d'un piston se déplaçant dans la direction axiale à de déplacement vitesse imposée.

Le vocabulaire suivant est usuellement utilisé :

- *consolidation isotrope* pour un échantillon de sol placé dans la cellule et soumis à une pression hydrostatique ;
- *consolidation anisotrope* pour un échantillon placé dans la cellule et soumis à une pression latérale différente de la contrainte verticale appliquée par le piston. On peut dans ce cas recréer l'état des contraintes naturelles in situ ;
- *chargement hydrostatique* lorsque l'échantillon est soumis à une pression hydrostatique. Le chargement hydrostatique est défini ici par la variable p et est égal à $p = (\sigma_a + \sigma_r)/2$;
- *chargement déviatorique* lorsque l'échantillon préalablement consolidé est soumis à un chargement axial supplémentaire, la pression de confinement restant constante. Le chargement déviatorique est défini ici par la variable q et est égal à $q = \sigma_a - \sigma_r$.

On notera qu'ici les définitions de p et q diffèrent de celles employées dans le modèle de comportement de Cam Clay.

Les courbes de la figure 14.6 montrent l'effet de la pression de confinement p sur le comportement uniaxial d'un sable sec lâche lors de l'augmentation de la contrainte axiale. On retrouve la même allure des courbes pour les roches, mais les contraintes de compression sont beaucoup plus élevées.

À partir des courbes $\epsilon_a - q$, on peut aisément positionner dans le plan $p - q$ les points pour différentes valeurs initiales de p et retrouver l'angle de frottement interne d'une ligne de rupture dans le plan de Mohr (q, p). L'intérêt d'un tel essai se révèle surtout pour les matériaux saturés avec contrôle des conditions de drainage. On peut également voir l'évolution de l'indice des vides e qui est relié à la déformation volumique $\epsilon_v = \epsilon_a + 2\epsilon_r$.

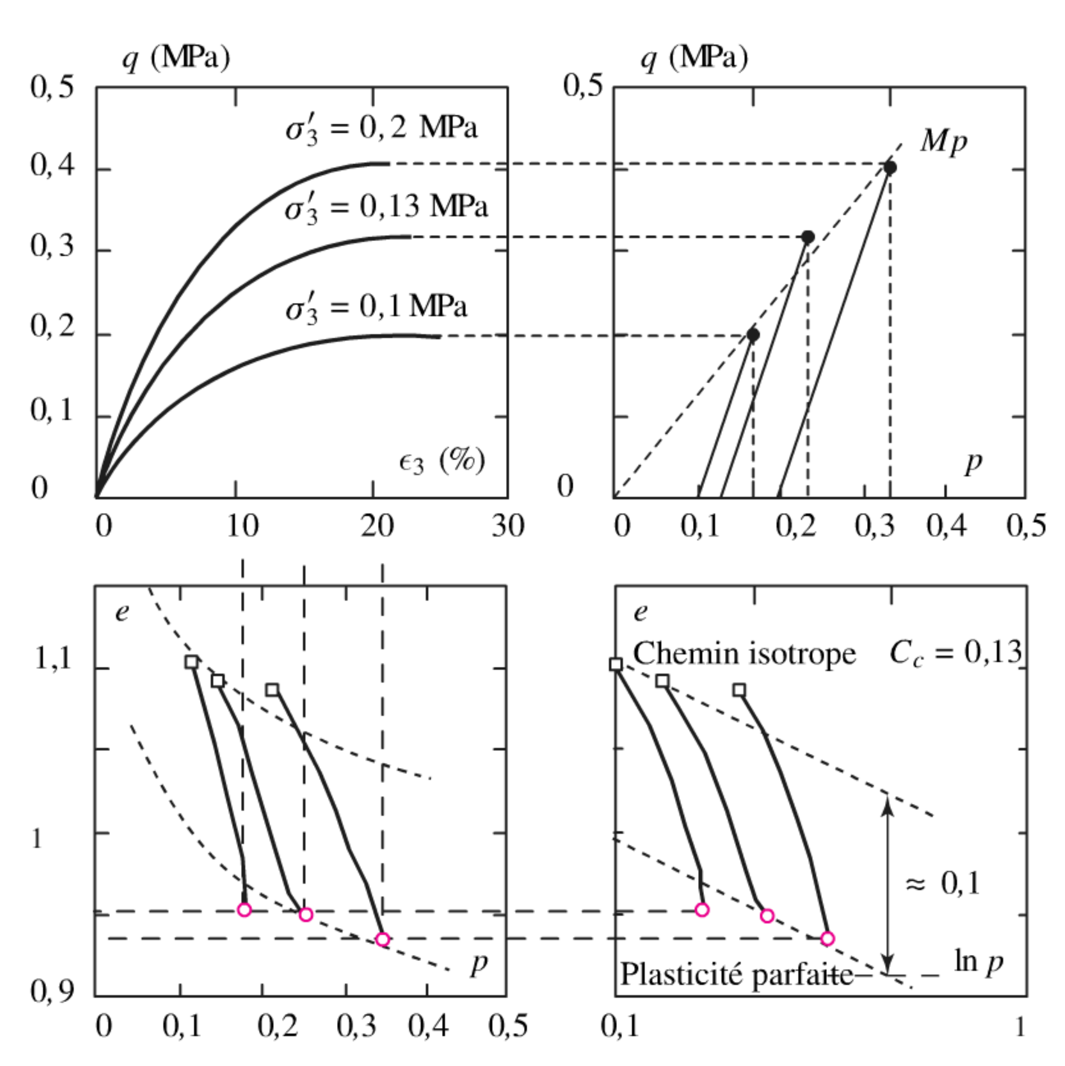


Figure 14.6 Exemple de comportement au triaxial obtenu sur un sable lâche (d'après Reiffsteck [34]).

Remarques

- Certains auteurs proposent de corriger la valeur apparente de la contrainte à la rupture pour éliminer l'influence de la rigidité de la membrane sur le comportement de l'échantillon.
- En raison du phénomène de frettage, les éprouvettes de sols plastiques soumises à de grandes déformations prennent la forme d'un tonneau. La contrainte axiale vraie $\sigma_a - \sigma_r$ induite par la force du piston vaut F/S et non F/S_0, S étant la surface actuelle qui, sous l'hypothèse de déformations à volume constant, s'obtient par $S_0 H_0 = S H_0(1 - \varepsilon)$. C'est notamment le cas des essais non drainés. La contrainte déviatorique vaut alors $\sigma_a - \sigma_r = F(1 - \varepsilon)/S_0$.

Lors d'un essai triaxial, l'état des contraintes dans le plan de Mohr est caractérisé par un seul cercle car deux contraintes diagonales sont identiques et de ce fait les trois cercles de Mohr représentatifs de l'état des contraintes sont confondus.

Dans la phase de chargement hydrostatique, les cercles de Mohr se réduisent à un point qui se déplace sur l'axe de la contrainte normale jusqu'à la valeur du confinement. Ensuite, le cercle de Mohr croît jusqu'à une taille maximale pour $\sigma_a = \sigma_a^{max}$ (Fig. 14.7). Puis dans la phase d'adoucissement, la taille décroît jusqu'à ce que $\sigma_a = \sigma_a^{res}$. On voit donc apparaître ici deux cercles de Mohr limites.

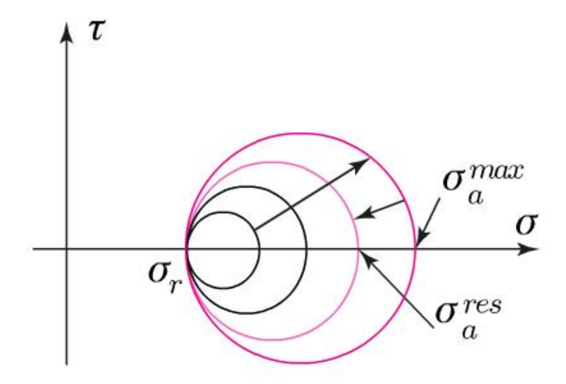


Figure 14.7 États de contraintes dans un essai triaxial (convention MS).

Si l'on représente dans le plan de Mohr pour différentes valeurs de confinement σ_r les cercles de Mohr limites correspondant à la contrainte axiale maximale atteinte, il est possible de construire une courbe enveloppe de ces cercles (Fig. 14.8).

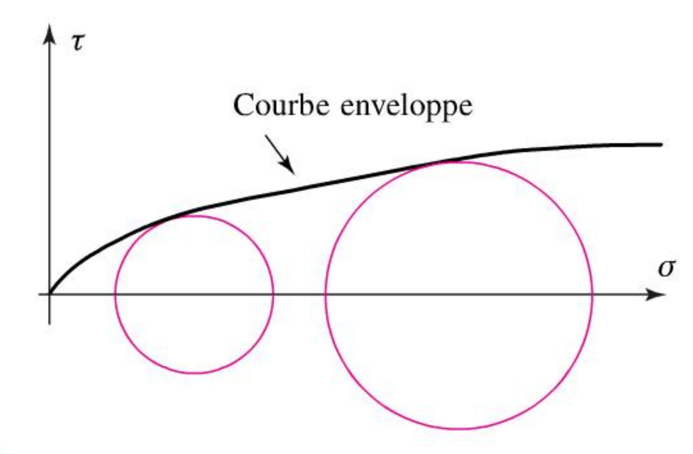


Figure 14.8 Courbe enveloppe des cercles de Mohr limites de rupture (convention MS).

Cette courbe est dissymétrique. Elle est bornée dans le domaine de la traction en raison de la faible résistance des sols. Dans le domaine de la compression, elle est ouverte. Pour les roches, elle a tendance pour des confinements élevés à tendre vers une asymptote horizontale. Pour les sols fins, elle se referme pour des confinements élevés. L'aire délimitée par l'axe horizontal et la courbe enveloppe définie le domaine des contraintes admissibles par le matériau. Lorsque le cercle de Mohr tangente la courbe, le matériau atteint l'état limite de rupture.

Dans le cas des matériaux ductiles, on peut définir également une courbe enveloppe des cercles de Mohr de résistance résiduelle du matériau. En fait, lors de la phase adoucissante du matériau, il y a un glissement progressif de la courbe enveloppe de rupture vers la courbe enveloppe de résistance résiduelle.

15 Caractérisation sous chargement multiaxial des sols humides ou saturés

15.1 Introduction

Lorsque le sol est humide, les comportements hydraulique et mécanique sont fortement couplés : en présence d'une charge mécanique, il y a diffusion de l'eau dans le milieu poreux en raison de la surpression interstitielle.

Les courbes qui caractérisent le comportement mécanique n'ont de sens qu'en terme de contrainte effective puisque cette quantité est reliée aux déformations via la loi de comportement. Les différents essais présentés précédemment peuvent être réalisés en conditions :

- *drainées*. L'eau peut s'échapper librement et la pression interstitielle reste en permanence à sa valeur initiale. Dans ce cas la variation de la contrainte totale appliquée est égale à la variation de la contrainte effective ;
- *non drainées*. L'évacuation de l'eau est empêchée et de ce fait la pression interstitielle varie. Dans ce cas, la variation de la contrainte effective est calculée à partir de la variation de la contrainte totale appliquée et de la variation de la pression interstitielle ;
- *intermédiaires*. Ces cas ne sont pas utilisés dans la pratique, même s'ils correspondent à la majorité des situations rencontrées in situ qui ne sont ni parfaitement drainées ni parfaitement non drainées.

Il devient alors nécessaire d'étudier le comportement du sol à différents états. On distingue les essais suivants :

- **Essai non consolidé et non drainé UU** (*Unconsolidated, Undrained*). Dans cet essai, l'échantillon n'est pas drainé durant les deux phases de chargement.
- **Essai consolidé et non drainé CU** (*Consolidated, Undrained*). Dans cet essai, l'échantillon est uniquement drainé dans la première phase de chargement afin d'assurer la consolidation primaire.
- **Essai consolidé et drainé CD** (*Consolidated, Drained*). Dans cet essai, l'échantillon est drainé durant les deux phases de chargement.

On peut considérer comme drainés les essais sur des sols pulvérulents, des sols argileux avec des vitesses de chargement très faibles (par exemple, quelques micromètres par minute dans un essai de cisaillement direct). Par contre un essai sur un sol argileux avec des vitesses de chargement plus élevées (typiquement, quelques millimètres par minute dans un essai de cisaillement direct) sera considéré comme non drainé car le chargement est trop rapide pour que l'eau interstitielle ait eu le temps de diffuser et s'évacuer vers l'extérieur.

15.2 Des conditions in situ aux essais en laboratoire dans les sols humides

Pour caractériser le comportement des sols fins humides, il est important de connaître l'état des sols en place et plus précisément l'état des contraintes effectives et de la pression interstitielle en cas de présence d'eau. Si l'on considère par exemple une couche de sol homogène et saturé, à une profondeur H, les contraintes effectives verticale et horizontale valent respectivement :

$$\sigma'_v = \gamma' H \text{ et } \sigma'_h = K_0 \gamma' H, \tag{15.1}$$

et la pression interstitielle initiale vaut :

$$u_i = \gamma_w H. \tag{15.2}$$

Lorsque le sol est chargé par un ouvrage géotechnique, une surpression Δu apparaît dans l'eau présente dans le sol.

Si le changement est effectué sur une courte durée, cette surpression n'a pas le temps de se dissiper. L'eau et le squelette étant considérés comme incompressibles, il n'y a pas de variation de volume ($\Delta V = 0$) et de ce fait l'indice des vides e reste constant. Les déformations s'effectuent à volume constant et le sol peut être vu comme un milieu homogène sans transfert de masse. Les essais sans drainage de l'eau sont adaptés pour simuler ce type de comportement.

Au bout d'un certain temps, la surpression Δu s'annule et la charge est appliquée directement sur le squelette, même si le milieu reste saturé et l'eau soumise à une pression interstitielle. Le comportement diffère du précédent comme on le verra ci-dessous. Les essais avec drainage de l'eau permettent de caractériser ce type de comportement.

Les essais s'effectuent soit à partir de la boîte de cisaillement, soit à partir de l'essai triaxial.

15.3 Cisaillement des sols fins non consolidés – non drainés (UU)

Cet essai permet de caractériser le comportement à court terme du sol peu perméable en place. Il s'effectue à l'appareil triaxial ou à la boîte de cisaillement.

Dans le cas de l'essai triaxial, l'échantillon intact (non perturbé) est soumis dans un premier temps, à un état de contrainte isotrope caractérisé par une pression p (Fig. 15.1). Puis, la contrainte totale axiale σ_a est augmentée en maintenant la contrainte radiale σ_r constante. L'allure des courbes « déviateur $\sigma_a - \sigma_r$ - déformation axiale ϵ_a » est similaire pour les différents états de pression initiale p. On constate seulement une augmentation de la contrainte totale axiale maximale $\sigma_a^{\max}$ avec la pression radiale imposée $\sigma_r = p$.

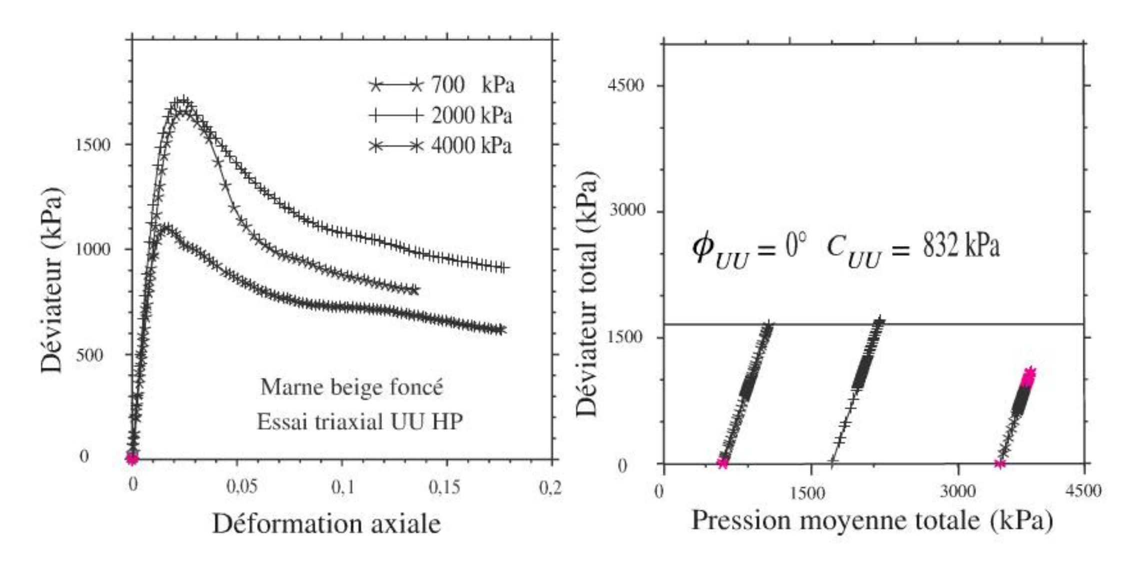


Figure 15.1 Essais triaxiaux UU sur une marne beige (avec l'autorisation de J.F. Serratrisse).

Les essais montrent que la *contrainte déviatorique maximale* $\sigma_a^{\max} - \sigma_r$ *est constante* quel que soit le confinement latéral imposé ($\sigma_r = p$). De ce fait, la résistance au cisaillement du sol est indépendante de la valeur de la contrainte isotrope initiale.

Si on reporte les couples (p, $\sigma_a^{\max}$) obtenus pour les différents essais dans un diagramme de Mohr, on peut (avec les limitations liées aux essais) identifier une cohésion non drainée C_{UU} et un angle de frottement interne ϕ_{UU} qui est quasi nul (Fig. 15.2).

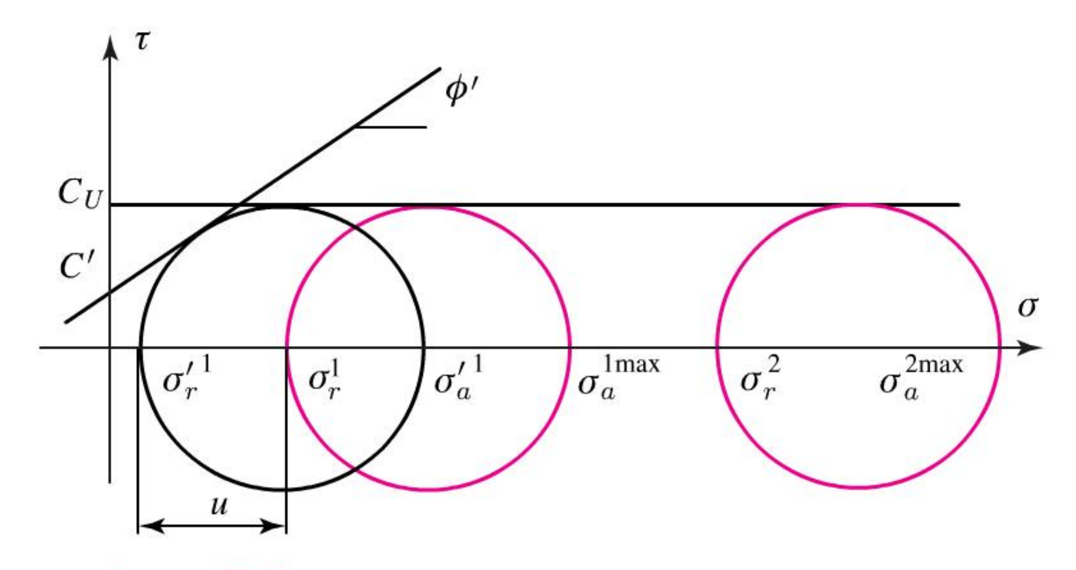


Figure 15.2 Résistance d'un sol fin (essais triaxiaux UU).

Le critère de rupture peut s'assimiler en première approximation à un critère de Tresca de cohésion C_U appelé *cohésion non drainée* du sol. Si le sol n'est pas saturé initialement, l'angle ϕ_{UU} est différent de zéro car le sol se consolide en cours d'essai.

Dans le tableau 15.1 on donne l'ordre de grandeur de C_U pour différentes argiles.

Tableau 15.1 Valeurs de la cohésion.

Argile	C_u (kPa)
Ferme	12 - 25
Très ferme	25 - 50
Raide	50 - 100
Très raide	100 - 200
Dure	> 200

Justification :

• Après extraction, le sol saturé est décomprimé et, de ce fait, une surpression interstitielle u_i s'y développe. L'état initial des contraintes dans l'échantillon est donc défini par :

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_a = 0 \\ u = u_i \\ \sigma'_r = \sigma'_a = -u_i \end{cases} \tag{15.3}$$

• Lors de la mise en compression isotrope de l'échantillon, on augmente les contraintes totales d'une même valeur p. Comme aucun drainage n'est effectué, cet accroissement produit un $\Delta u = p$. Par suite les contraintes effectives et les déformations restent inchangées. L'état des contraintes est donc défini par :

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_a = p \\ u = u_i + u_0 \\ \sigma'_r = \sigma'_a = -u_i \end{cases} \tag{15.4}$$

• Le cisaillement se réalise sans drainage, donc à volume constant et à contrainte latérale constante et égale à p. Par suite, la surpression Δu qui apparaît ne dépendra que de $\sigma_a - p$, soit $\Delta u = f(\Delta\sigma_a)$. À la rupture, on a un état de contrainte qui est caractérisé par :

$$\begin{cases} \sigma_{(3R)} = p + \Delta\sigma_a \qquad \sigma_r = p \\ u = u_i + u_0 + f(\Delta\sigma_a) \\ \sigma'_a = -u_i - f(\Delta\sigma_a) + \Delta\sigma_a \qquad \sigma'_r = -u_i - f(\Delta\sigma_a) \end{cases} \tag{15.5}$$

Cette analyse révèle que l'état des contraintes effectives est en fait indépendant de la valeur de la contrainte hydrostatique appliquée lors de la première phase de chargement. Les différents cercles de Mohr en contraintes totales ne correspondent qu'à un seul cercle de Mohr en contraintes effectives (Fig. 15.2). Comme le comportement à la rupture du sol dépend des contraintes effectives, il est normal que le comportement à court terme observé soit caractérisé par un critère de Tresca. La cohésion non drainée C_u dépend de l'état de compacité du sol qui lui-même dépend de la contrainte effective maximale subie par le sol. Elle est donc fonction de la pression de consolidation σ'_p.

15.4 Cisaillement des sols fins consolidés – drainés (CD)

Dans cet essai, l'échantillon est d'abord consolidé sous une pression $\sigma_r = \sigma_a = p$. Lorsque la consolidation est terminée (elle peut durer plusieurs jours), la surpression interstitielle Δu vaut 0. Ensuite, on applique un chargement déviatorique à vitesse très lente et à drainage ouvert pour éviter toute surpression interstitielle $(\Delta u = 0)$. Les contraintes totales appliquées sont donc identiques aux contraintes effectives. Un exemple de résultats d'essais est présenté sur la figure 15.3 pour la même marne beige. On retrouve les comportements uniaxiaux (déviateur – déformation axiale) ainsi que la déformation volumique en fonction de la déformation axiale. Cette déformation volumique indique un régime contractant. Lorsque les couples $(\sigma_r, \sigma_a^{\max})$ sont reportés dans le plan de Mohr,

les contraintes effectives sont égales aux contraintes appliquées puisque la pression interstitielle ne varie pas au cours de l'essai. On retrouve bien un critère de rupture de forme linéaire.

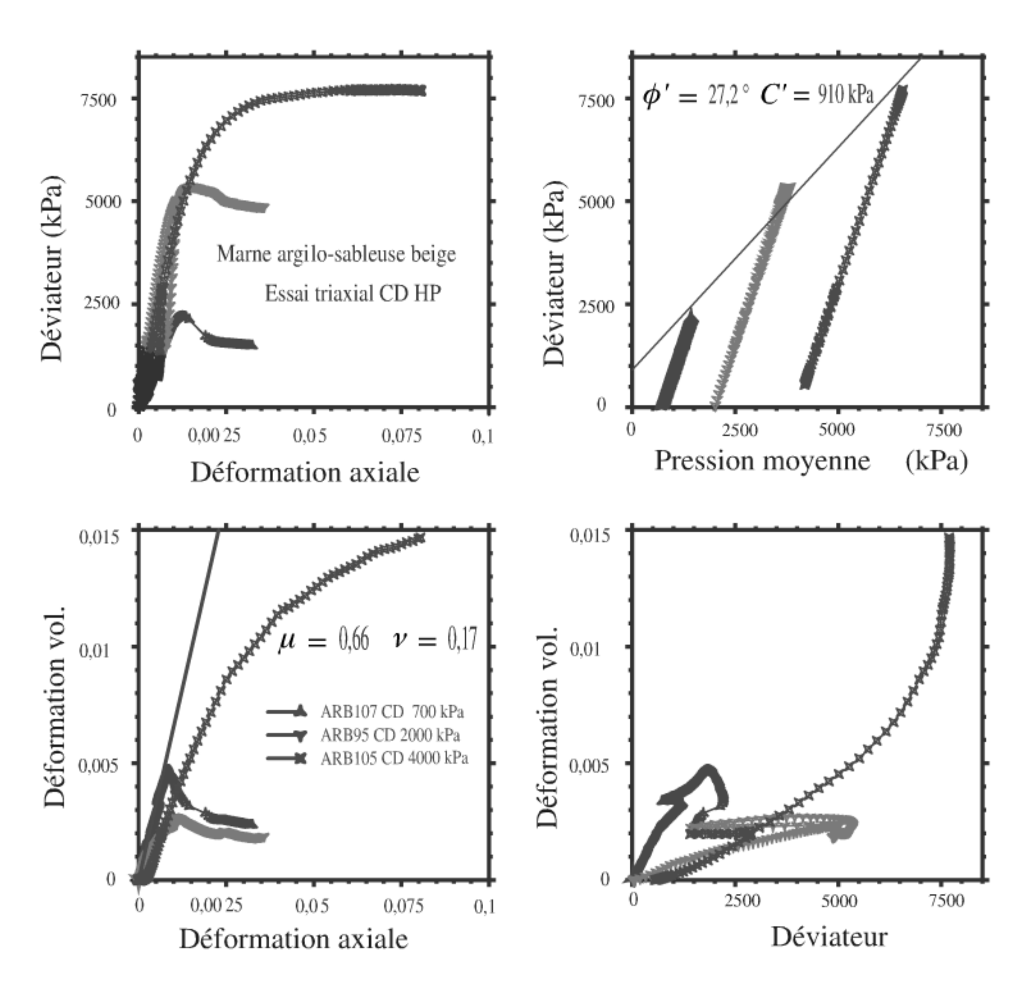


Figure 15.3 Essais triaxiaux CD sur une marne beige (avec l'autorisation de J.F. Serratrisse).

Il est possible, à partir de l'essai CU, de caractériser le critère de rupture du sol fin en contrainte effective qui, dans de nombreux cas, peut être assimilé à un critère de Coulomb (Fig. 15.4) :

$$\tau = C' - \sigma' \tan \phi', \tag{15.6}$$

où C' est la cohésion drainée et ϕ' est l'angle de frottement effectif. Dans le tableau 15.2, on donne l'ordre de grandeur de la cohésion et l'angle de frottement pour l'argile.

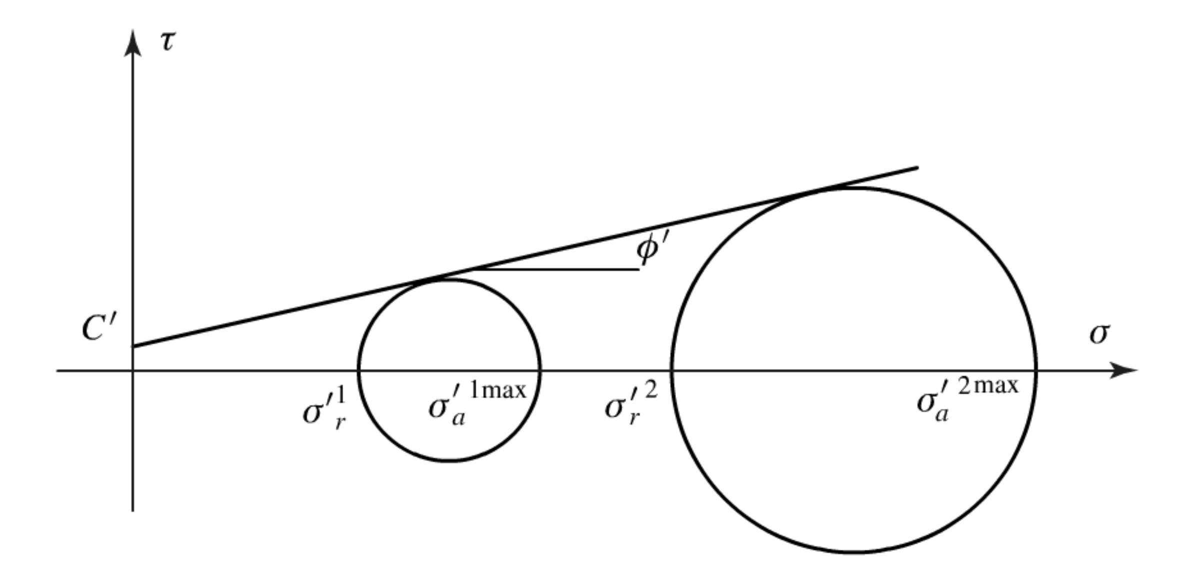


Figure 15.4 Résistance d'un sol fin (essais triaxiaux CD).

Tableau 15.2 Valeur de la cohésion et de l'angle de frottement pour l'argile.

Argile	ϕ'	C_u (kPa)
Normalement consolidée	$25 < \phi' < 30°$	$C' \approx 0$
Surconsolidée	$15 < \phi' < 25°$	$10 < C' < 20$

On remarquera que la cohésion des argiles normalement consolidées est voisine de zéro. Elle est différente de zéro pour les argiles surconsolidées en raison du phénomène d'adhérence entre grains induit au moment de la préconsolidation.

15.5 Cisaillement des sols fins consolidés – non drainés (CU)

L'essai (CU) permet de définir à la fois le comportement à court terme et à long terme. Il peut être fait soit à l'appareil triaxial, soit à la boîte de cisaillement. Dans le cas de l'essai triaxial, l'échantillon est dans une première phase consolidé avec un état de contrainte sphérique p. Les contraintes effectives σ'_r et σ'_a valent alors p. Ensuite, on augmente une contrainte déviatorique (à vitesse rapide) jusqu'à l'apparition de la rupture sous drainage nul.

Sous ces conditions, il est possible de caractériser la cohésion non drainée en fonction de la pression de consolidation (Fig. 15.5).

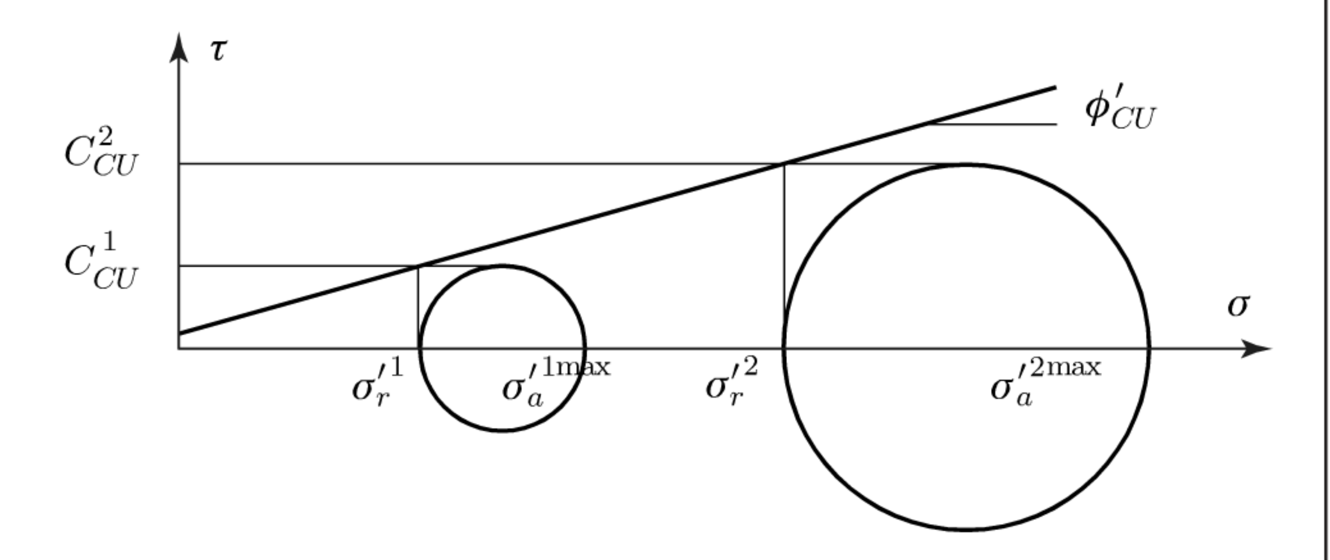


Figure 15.5 Résistance d'un sol fin (essais triaxiaux CU).

Cet essai permet donc de connaître la résistance au cisaillement à court terme d'un massif de sol préalablement consolidé sous une contrainte donnée. C'est le cas, par exemple, des remblais que l'on va édifier par étapes successives en attendant la consolidation du sol de fondation entre chaque étape.

$$C_U = C_{CU} - \sigma'_p \tan \phi_{CU}. \qquad (15.7)$$

La connaissance de la pression interstitielle au moment de la rupture est une information qui permet d'accéder à la connaissance des contraintes effectives et par suite au critère de rupture du comportement à long terme. La mesure de u peut être faite dans l'appareil triaxial. La figure 15.6 montre comment l'essai est exploité pour déterminer l'ensemble des caractéristiques.

Comme la seconde phase de chargement est rapide, l'essai CU permet un gain de temps très appréciable.

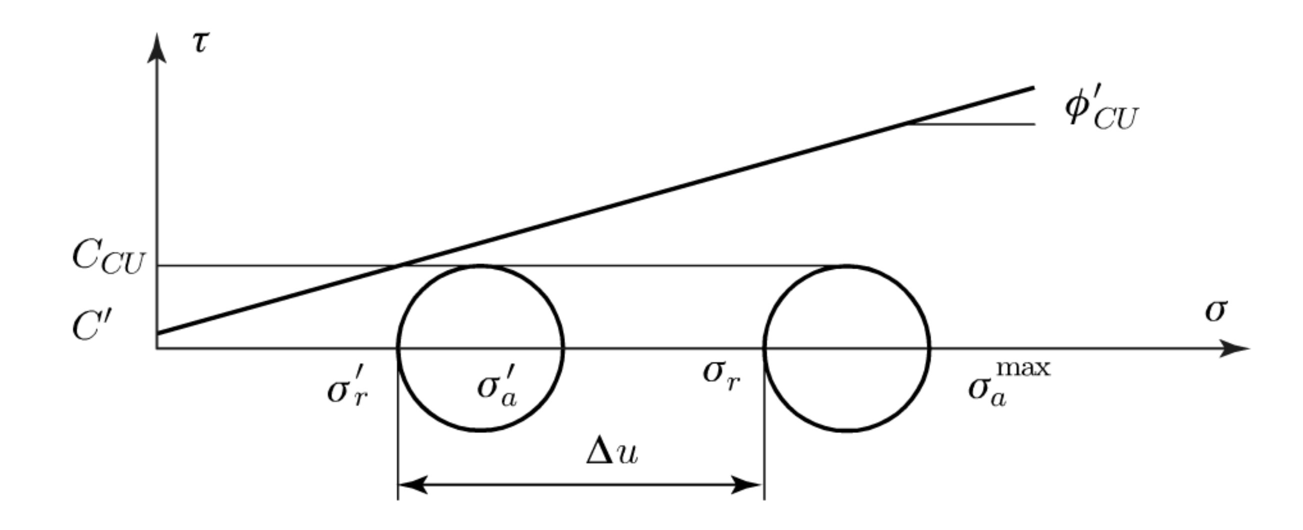


Figure 15.6 Résistance d'un sol fin
(essais triaxiaux CU avec mesure de la pression).



Un exemple de modèle de comportement : Cam Clay

Un calcul classique en mécanique des sols débute souvent par des méthodes simplifiées qui reposent sur de nombreuses hypothèses. On peut ainsi procéder à des calculs élastiques linéaires qui permettent d'utiliser des solutions analytiques (type solutions de Boussinesq) avec le principe de superposition.

Il faut garder à l'esprit que l'élasticité des sols est très souvent non linéaire ce qui limite la portée des résultats obtenus.

On peut ensuite utiliser des modèles élasto-plastiques simples avec critère de type Mohr Coulomb et de Drucker Prager que l'on trouve dans la plupart des codes de calcul.

L'objectif de cette partie est de donner les grandes lignes d'un modèle de comportement non linéaire à la fois simple dans sa construction et son identification et performant dans la description d'effets du trajet de chargement, des conditions de drainage.

Ce modèle est plutôt adapté aux sols fins qui font l'objet de notre préoccupation. Le lecteur intéressé ira chercher les détails dans les nombreux ouvrages.

16 Modèle de Cam Clay

16.1 Définition, hypothèses

Nous détaillons ce modèle car historiquement c'est le premier qui a permis pour les sols (argiles) des descriptions fines de plusieurs aspects du comportement non linéaire. C'est aussi un modèle très utilisé en mécanique des sols et implantés dans les grands codes de calculs. Nous travaillons dans ce chapitre en notation MS (les contraintes de compression sont positives). Rappellons les notations classiques :

- $p' = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}')$ représente la pression hydrostatique effective ;
- $\underline{\underline{s}}$ représente le déviateur (nous savons que la pression interstitielle ne change pas cette quantité) ;
- ϵ_v représente la déformation volumique et d_v sa vitesse ;
- $\underline{\underline{e}}$ est le déviateur des déformations ;
- ϵ_d est un invariant des déformations déviatoriques $\epsilon_d = \frac{2}{3}\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}$ et d_d sa vitesse ;
- les exposants e et p désignent élasticité et plasticité.

16.1.1 Élasticité

On sait que pour les sables, les argiles cette élasticité est non linéaire. Une façon simple de la prendre en compte est de considérer que la rigidité dépend de p' et de e (indice des vides) :



$$\dot{\epsilon}_v^e = \kappa \frac{\dot{p}'}{(1+e)p'}, \tag{16.1}$$

avec κ la pente de la droite élastique de la réponse œdométrique dans le diagramme $(e, \ln p')$ et $(1+e)$ qui est appelé *volume spécifique* noté v. On a

$$v = 1 + e = 1 + \frac{V_v}{V_s} = \frac{V}{V_s}. \tag{16.2}$$

La quantité v correspond donc au volume de sol qui contient un volume de squelette donné. On peut définir la quantité v_K qui est constante dans un trajet élastique :

$$v_K = v + \kappa \ln p'. \tag{16.3}$$

Supposons que la valeur de κ est une constante matériau (pas d'évolution de l'élasticité avec la plasticité).

L'élasticité déviatorique pose un problème simple et devrait également dépendre de v et p'.

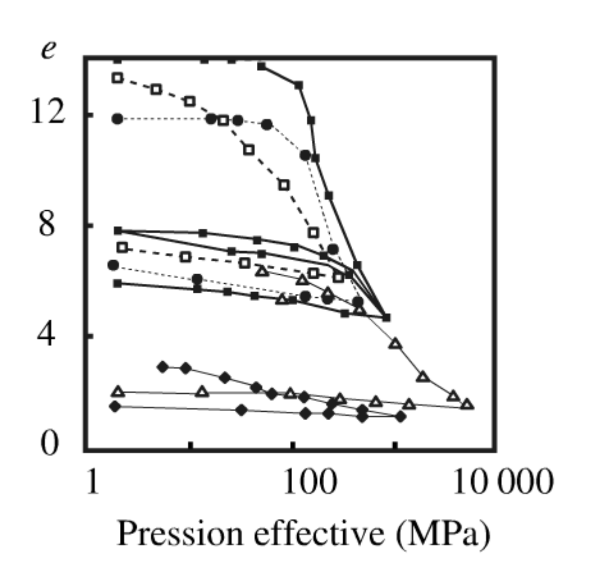
$$\underline{\underline{e}}^e = \frac{\underline{\underline{s}}}{3G}. \tag{16.4}$$

Choisir un module de cisaillement G constant se traduit de fait par un coefficient de Poisson variable avec la pression (et même très variable !) ce qui n'est pas conforme aux observations. En toute logique il faudrait aussi faire dépendre G de la pression effective. Les auteurs du modèle de Cam Clay initial ont donc supposé l'élasticité déviatorique nulle par souci de simplicité. Le lecteur intéressé peut consulter l'ouvrage récent de Nova, 2005 [29] pour plus de détails sur ce point.

16.1.2 Domaine d'élasticité

Nous apportons dans ce chapitre les éléments principaux qui expliquent la construction de ce modèle de Cam Clay.

Première constatation expérimentale : les courbes de consolidation (œdométrique ou isotrope) permettent de tracer dans le plan $(v, \ln p')$ les courbes dont la schématisation est donnée sur la figure 16.1.



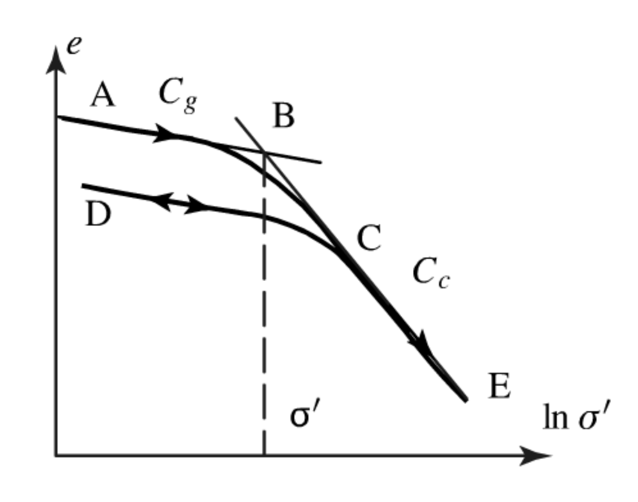


Figure 16.1 Résultat d'essais œdométriques sur une argile (d'après Rutledge [35]).

On peut donc considérer que cette courbe correspond à un comportement élasto-plastique écrouissable avec la partie AB qui représente l'élasticité non linéaire et la partie BC qui représente l'écrouissage du sol (la consolidation plastique). On peut écrire que la consolidation a pour équation (avec λ paramètre de sol) :

$$v = v_0 - \lambda \ln \frac{p'}{p'_0}. \qquad (16.5)$$

En raisonnant en termes de vitesse (ou d'incrément) de déformation plastique, on a :

$$\dot{v}_p = \dot{v} + \kappa \frac{\dot{p}'}{p'}. \qquad (16.6)$$

Il est aussi possible de définir le paramètre v_λ :

$$v_\lambda = v + \lambda \ln p'. \qquad (16.7)$$

Pour simplifier cette présentation, on suppose que les lois d'évolutions des déformations plastiques dérivent directement de la surface de charge c'est-à-dire que le modèle est associé. Soit $f(\underline{\underline{\sigma}}, E)$ l'équation de ce domaine qui compte tenu de la partition entre partie sphérique et déviatorique s'écrit :

$$f = p' + \alpha q - k = 0, \tag{16.8}$$

avec k un paramètre (ou une fonction) d'écrouissage. Raisonnons avec une plasticité parfaite, donc avec k constante dans un premier temps. On déduit de la relation 9.7 qui traduit l'écoulement plastique :

$$d_v^p = \mu \frac{\partial f \partial p'}{\partial p'}, \tag{16.9}$$

$$d_d^p = \mu \frac{\partial f \partial q}{\partial q}, \tag{16.10}$$

avec μ le multiplicateur plastique.

La quantité ϵ_d permet de travailler avec un invariant donc un scalaire. Ces relations tirent profit du fait que les quantités q et p' sont indépendantes. On en déduit que la dilatance plastique d vaut par définition :

$$d = \frac{d_d^p}{d_v^p} = \frac{\partial f}{\partial p'} / \frac{\partial f}{\partial q}. \tag{16.11}$$

Pour aller plus loin dans la formulation de la fonction f, il faut des données expérimentales. Reprenons la figure 15.3. Les courbes indiquent qu'un même sol soumis à une étreinte latérale constante pendant l'essai et différente d'un essai à l'autre se rompt pour des contraintes axiales telles que dans le graphe (p', q) on trouve une droite

$$q = Mp', \tag{16.12}$$

avec M paramètre matériau identifiable d'après les essais (à ne pas confondre avec le module Biot). Cette droite est appelée droite (ou ligne) d'état critique et sera notée LEC dans les figures. À cette constatation on

ajoute le fait expérimental que cette rupture intervient pour une dilatance quasi nulle. Ceci permet alors d'écrire par exemple :

$$d = M - \frac{q}{p'} = 0 \quad \text{pour} \quad q = Mp'. \tag{16.13}$$

Il suffit alors de reprendre l'équation 9.6 pour écrire :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial p'}\dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} = 0 \tag{16.14}$$

et aboutir à l'équation simple suivante :

$$\frac{\dot{q}}{\dot{p}'} = \frac{q}{p'} - M, \tag{16.15}$$

dont la solution générale est

$$q = Mp' \ln (p' + Cste). \tag{16.16}$$

La constante $Cste$ peut être déterminée via l'hypothèse que pour une pression p'_c la fonction f est nulle. Cela permet donc d'avoir la forme finale qui correspond à la première version du modèle de Cam Clay :

$$f = \frac{q}{Mp'} + \ln \frac{p'}{p'_c} \quad \text{ou} \quad f = q + Mp' \ln \frac{p'}{p'_c}. \tag{16.17}$$

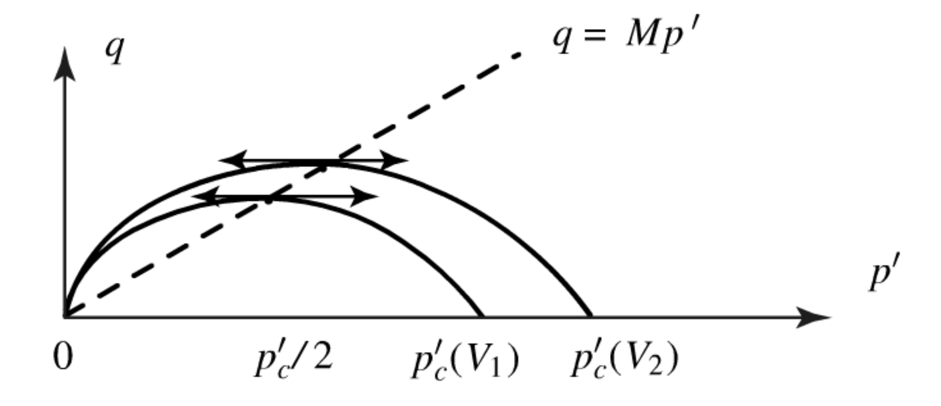


Figure 16.2 Critère original de Cam Clay.

16

On trouve sur la figure 16.2 la forme de ce critère. Si on trace cette fonction pour différentes valeurs de p'_c on retrouve des courbes de même forme avec une droite dite d'état critique (qui a servi à la construction du modèle). Une propriété importante de ce modèle est que pour un rapport q/p' donné la dilatance d est unique et ne dépend pas de la pression de compactage (Fig. 16.3).

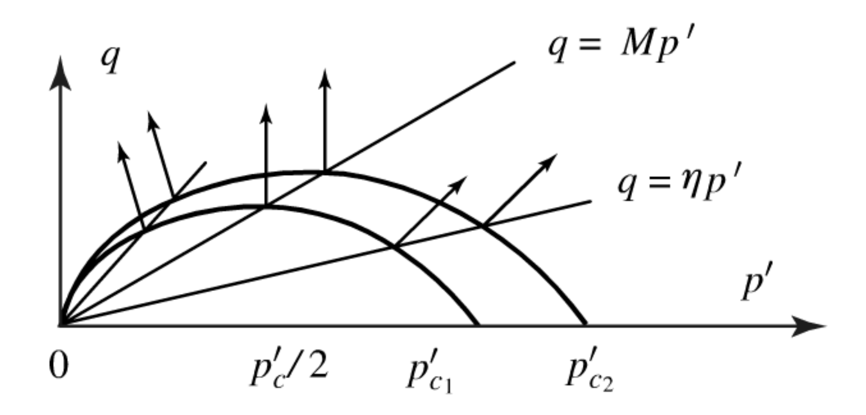


Figure 16.3 Dilatance avec le modèle de Cam Clay pour un chargement radial.

On peut réécrire l'équation 16.17 sous la forme

$$f(p,q,v) = \frac{q}{Mp'} + \ln p + \frac{v - \Gamma}{\lambda - \kappa} - 1, \qquad (16.18)$$

avec Γ constante définie par la relation simple

$$v_\lambda = v_K + (\lambda - \kappa) \ln p' = \Lambda, \qquad (16.19)$$

ce qui permet de voir la quantité $\dfrac{v_K - \Gamma}{\lambda - \kappa}$ comme une fonction d'écrouissage (voir Salençon, 1974 [36]), puisque la quantité v_κ n'évolue que pour un point de chargement situé sur la droite de consolidation (la plasticité évolue). Si on se situe dans le domaine élastique (droite de pente κ) la valeur de v_κ est une constante. Cette quantité joue un rôle analogue à la déformation plastique cumulée p des modèles de plasticité des métaux. L'écrouissage associé est donc de type isotrope.

Cette forme de critère comporte un point conique (sur l'axe des pressions effectives) et, de ce fait, ceci ne permet pas avec cette loi d'évolution associée de préciser la normale. On parle de *cône des normales*. Mais il paraît évident que lors d'un essai de compression isotrope aucune vitesse de distorsion plastique n'apparaît. En conséquence, la vitesse de déformation plastique est purement volumique ; *la direction est donc parfaitement connue* contrairement à ce que laisserait supposer la loi d'évolution dérivant de la surface de charge. C'est pour cette raison qu'une version dite modifiée a été proposée avec un critère de type ellipsoïdal dans l'espace des contraintes q, p'. Il est de la forme :

$$f(p,q,p_c) = q^2 + M^2 p'(p' - p'_c). \tag{16.20}$$

La forme de ce critère dans le plan q, p' est donnée sur la figure 16.4. Dans ce plan, l'ellipse est centrée sur l'axe des pressions à l'abscisse p'_c. *La droite d'état critique demeure*, en témoigne la présence de M. La forme du critère est donnée par M alors que p'_c contrôle la taille. Cette forme améliore la description du comportement des argiles normalement consolidées. Elle pose encore des problèmes de description du comportement des argiles fortement consolidées d'où des développements ultérieurs non mentionnés dans cet ouvrage (voir Nova, 2005 [29]).

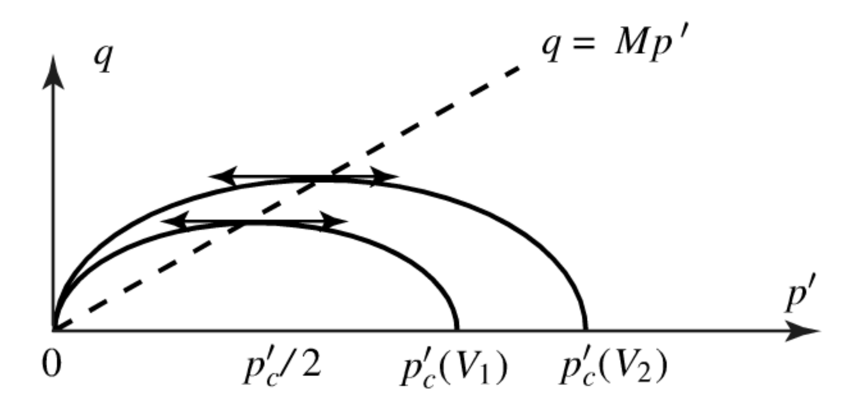


Figure 16.4 Critère de Cam Clay modifié.



16.2 Lois d'évolution

Le sol étant supposé isotrope, il est possible de travailler avec les invariants des différents tenseurs : les déformations plastiques ϵ_v^p et ϵ_d^p qui permettent de décrire la plasticité parfaite, les déformations élastiques $\epsilon_v^e = \epsilon_v - \epsilon_v^p$ et $\epsilon_d^e = \epsilon_v - \epsilon_v^p$. Une variable d'écrouissage supplémentaire est également introduite. Dans la suite, l'écrouissage (consolidation) est contrôlé par la déformation plastique volumique. Il est donc logique de prendre ϵ_v^p comme variable contrôlant l'écrouissage.

Adoptons comme fonction de charge celle du modèle de Cam Clay original car les calculs sont plus simples et permettent de montrer les grandes lignes :

$$f = q + Mp' \ln \frac{p'}{p'_c}. \tag{16.21}$$

Notons η le rapport q/p' qui vaut M sur la droite d'état critique. Considérons un modèle d'élasto-plasticité avec écrouissage, p'_c étant la grandeur mesurable qui caractérise cet écrouissage. La loi d'évolution qui dérive de ce critère s'exprime sous la forme de deux équations :

$$\begin{aligned} d_v^p &= \mu \frac{\partial f}{\partial p'} = \mu(M - \eta) = \mu d, \\ d_d^p &= \mu \frac{\partial f}{\partial q} = \mu. \end{aligned} \tag{16.22}$$

Le multiplicateur plastique μ peut alors être déterminé à partir de la relation de consistance 16.14.

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial p'}\dot{p}' + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p'_c}\dot{p}'_c = 0, \tag{16.23}$$

où p'_c est une fonction d'écrouissage de la variable ϵ_v^p. On en déduit donc :

$$\dot{p}'_c = \frac{\partial p'_c}{\partial \epsilon_v^p} d_v^p, \tag{16.24}$$

que l'on combine avec l'équation précédente pour obtenir l'expression du multiplicateur plastique :

$$\mu = \frac{M - \eta \dot{p}' + \dot{q}}{M \dfrac{p'}{q} \left[\dfrac{\partial p_c'}{\partial \epsilon_d^p} (M - \eta) + \dfrac{\partial p_c'}{\partial \epsilon_v^p} \right]}. \tag{16.25}$$

Le modèle est alors entièrement défini puisque l'élasticité l'est et que la loi d'évolution des déformations plastiques l'est avec l'expression du multiplicateur plastique.

Pour identifier la loi d'écrouissage $p_c'(\epsilon_v^p)$, il faut alors revenir aux essais. Supposons que l'écrouissage est donné par la droite de consolidation :

$$\frac{\dot{p}_c}{p_c} = \frac{d_v^p}{\lambda - \kappa}. \tag{16.26}$$

Dans ce cas, le multiplicateur vaut :

$$\mu = (\lambda - \kappa) \frac{(M - \eta)\dot{p}' + \dot{q}}{Mp'(M - \eta)}. \tag{16.27}$$

On peut alors écrire les lois d'évolution sous la forme d'une relation entre les vitesses de déformation totales et les vitesses de contrainte ;

$$\begin{pmatrix} d_v \\ \\ d_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\kappa}{p'} + \dfrac{(\lambda - \kappa)d}{Mp'} & \dfrac{(\lambda - \kappa)}{Mp'} \\ \dfrac{(\lambda - \kappa)}{Mp'} & \dfrac{(\lambda - \kappa)}{Mdp'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{p}' \\ \\ \dot{q} \end{pmatrix}. \tag{16.28}$$

Le modèle est donc entièrement identifiable pour des trajets de sollicitation triaxiaux classiques.

16.3 Réponse du modèle de Cam Clay

On peut raisonner indifféremment sur le principe avec le modèle original ou modifié. Utilisons le modèle original avec comme hypothèses principales :



- une élasticité déviatorique nulle (soit G infini) ;
- un écrouissage régit par la déformation plastique volumique ;
- une ligne d'état critique pour $\eta = M$.

Les prédictions sont faites pour des chargements triaxiaux de type CD ou CU avec une pression hydrostatique effective constante car les calculs sont plus simples puisqu'on se retrouve dans un chargement piloté par les variables du modèle. Dans ce cas les expressions analytiques simples sont fournies (voir Nova, 2005 [29]). Nous donnons également la forme des courbes pour les chargements classiques triaxiaux à étreinte latérale constante, courbes reprises de l'ouvrage de Lancellota, 1995 [23].

16.3.1 Chargement triaxial de type CD sur un sol normalement consolidé

Soit un sol normalement consolidé ou très légèrement surconsolidé sollicité en essai triaxial de type CD. On le consolide à une pression p'_c inférieure à la pression de préconsolidation. Le sol passe donc du point O au point A dans le plan (q, p') et demeure donc dans le domaine élastique (Fig. 16.5).

On peut déduire des lois d'évolution définies en 16.28 l'équation qui régit les déformations volumiques avec A comme origine des déformations :

$$\epsilon_v = \frac{\lambda - \kappa}{M p'} q, \tag{16.29}$$

et

$$\epsilon_d = -\frac{\lambda - \kappa}{M} \ln \left(1 - \frac{\eta}{M}\right). \tag{16.30}$$

En éliminant η dans ces deux équations, on obtient la relation qui lie les déformations totales

$$\epsilon_v = -(\lambda - \kappa) \left(1 - \exp \frac{-M \epsilon_d}{\lambda - \kappa}\right). \tag{16.31}$$

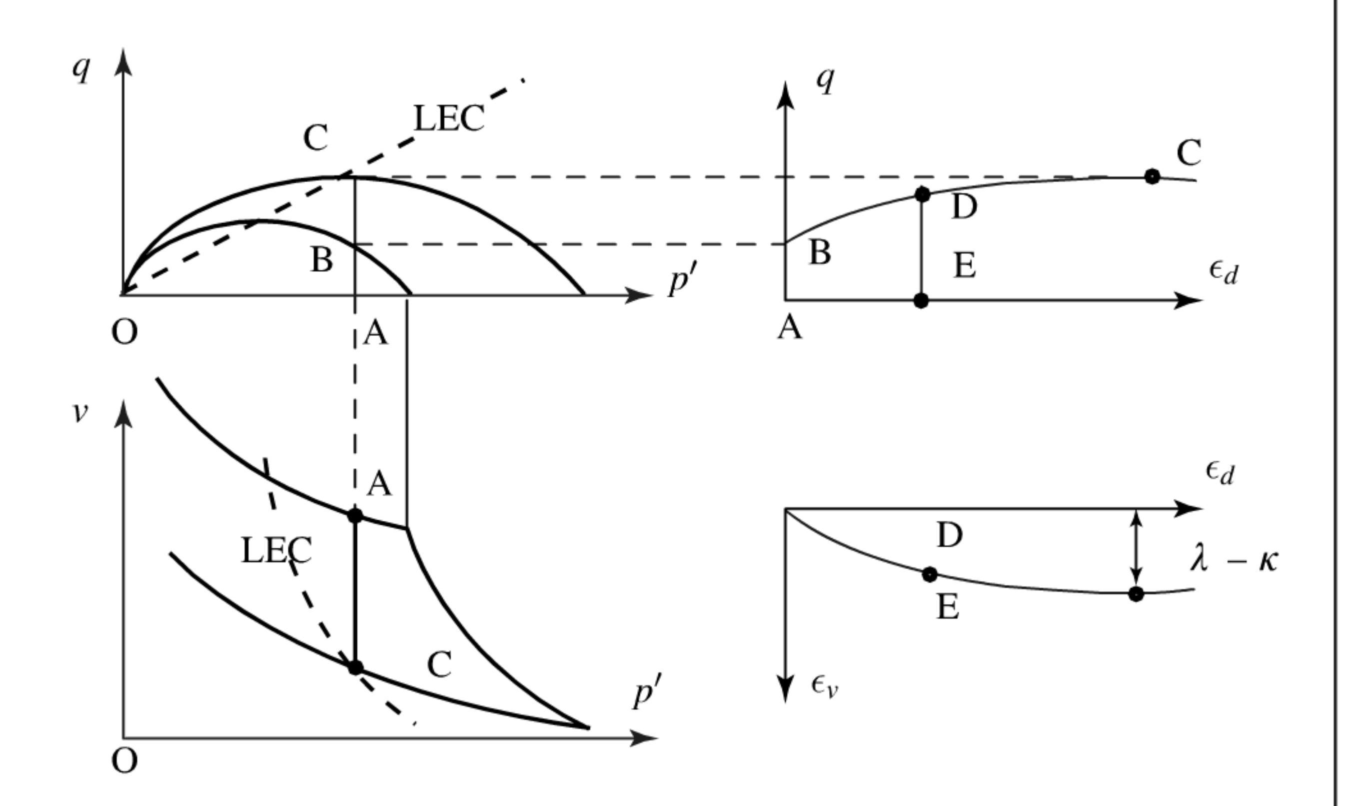


Figure 16.5 Essai triaxial CD sur un sol légèrement surconsolidé (d'après Lancellota [23]).

Puis on applique le déviateur à pression latérale constante ce qui l'amène au point B qui se situe sur la frontière du domaine élastique. Le sol étant drainé son volume spécifique diminue ce qui explique le trajet dans le plan (v, p'). Comme G est infini, la quantité ϵ_d^e est nulle sur ce trajet AB.

Puis de B à C le sol se plastifie et s'écrouit, ce qui explique l'augmentation du domaine d'élasticité, et, conformément à l'hypothèse d'état critique, la rupture a lieu pour une vitesse de déformation volumique nulle, ce qui impose au point C d'être situé sur l'axe de l'ellipse.

Dans le plan (v, p'), la courbe rejoint la courbe de consolidation correspondant à l'état critique. Si on procède à une décharge élastique entre les points B et C on a les trajets réversibles DE tels que la déformation volumique reste constante (p' reste constante) et sans déformation déviatorique élastique.

16.3.2 Chargement triaxial de type CU sur un sol normalement consolidé

Équations de base

Soit un sol normalement consolidé ou très légèrement surconsolidé sollicité en essai triaxial classique non drainé.

On reprend les équations d'évolutions avec cette fois la condition de non-drainage qui impose $d_v = 0$ (pas de variation de volume) et on obtient :

$$d_v = 0 = \left(\frac{\kappa}{p'} + (\lambda - \kappa)\frac{d}{Mp'}\right)\dot{p}' + \frac{\lambda - \kappa}{Mp'}\dot{q}. \quad (16.32)$$

Or, comme $\eta = q/p'$, on a $\dot{\eta} = \dot{p}/p' - \eta\dot{p}'/p'$, soit sous une autre forme

$$\lambda\frac{\dot{p}'}{p'} = -(\lambda - \kappa)\frac{\dot{\eta}}{M}. \quad (16.33)$$

Par intégration, on en déduit :

$$\ln\frac{p'}{p'_0} = -\left(1 - \frac{\kappa}{\lambda}\right)\frac{\eta - \eta_0}{M}, \quad (16.34)$$

avec $\eta_0 = 0$, ce qui donne p'_0 pression de cellule à la fin de la consolidation. Il en résulte que (Fig. 16.6) :

$$q = -Mp' \ln\frac{p'}{p'_0}\frac{1}{1 - \kappa/\lambda}. \quad (16.35)$$

Compte tenu des ordres de grandeur des valeurs de κ et λ, on peut facilement négliger le second terme ce qui signifie que le trajet de chargement en contraintes effectives coïncide avec l'équation du domaine élastique.

On peut aboutir à l'expression des déformations déviatoriques en utilisant la deuxième loi d'évolution et obtenir :

$$\epsilon_d = -\frac{\lambda(\lambda - \kappa)}{M\lambda}\ln\left(1 - \frac{\eta}{M}\right). \quad (16.36)$$

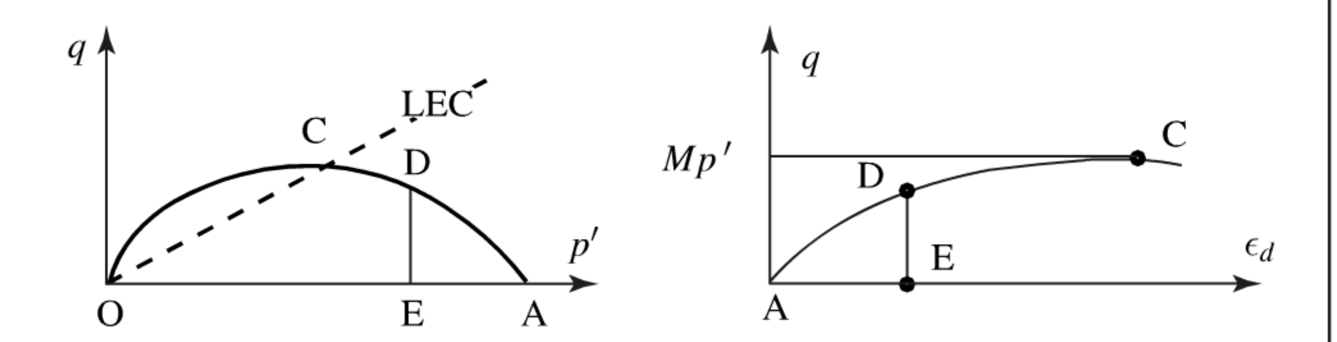


Figure 16.6 Essai triaxial CU sur un sol normalement consolidé (d'après Lancellota [23]).

Si on rapproche cette équation de l'équation 16.30, on remarque que, pour une même valeur de η, les déformations déviatoriques ont la même évolution mais avec une pente initiale beaucoup plus forte si le sol est non drainé. On retrouve bien l'effet logique lié à la condition de drainage ou de non-drainage.

Cas du chargement triaxial standard

Dans le cas du chargement classique, on a les courbes de la figure 16.7. On consolide le sol à une pression p'_c légèrement inférieure à la pression de préconsolidation. Le sol passe du point O au point A dans le plan (q, p') et demeure donc dans le domaine élastique. Puis on applique le déviateur à pression latérale constante et en conditions non drainées ce qui l'amène au point B qui se situe sur la frontière du domaine élastique. Comme le drainage est nul les déformations volumiques sont nulles en élasticité (squelette et eau incompressibles et pas d'échange d'eau). Le point B se déplace donc parallèlement à l'axe des ordonnées, le volume spécifique lui ne variant pas. La variation de pression interstitielle est alors égale à la variation de la pression totale appliquée.

Puis le sol se plastifie pour rejoindre le point C qui est sur la droite d'état critique. Dans le plan (e, p') le volume spécifique ne varie pas et le point C (tout comme B) si situe sur une parallèle à l'axe des abscisses.



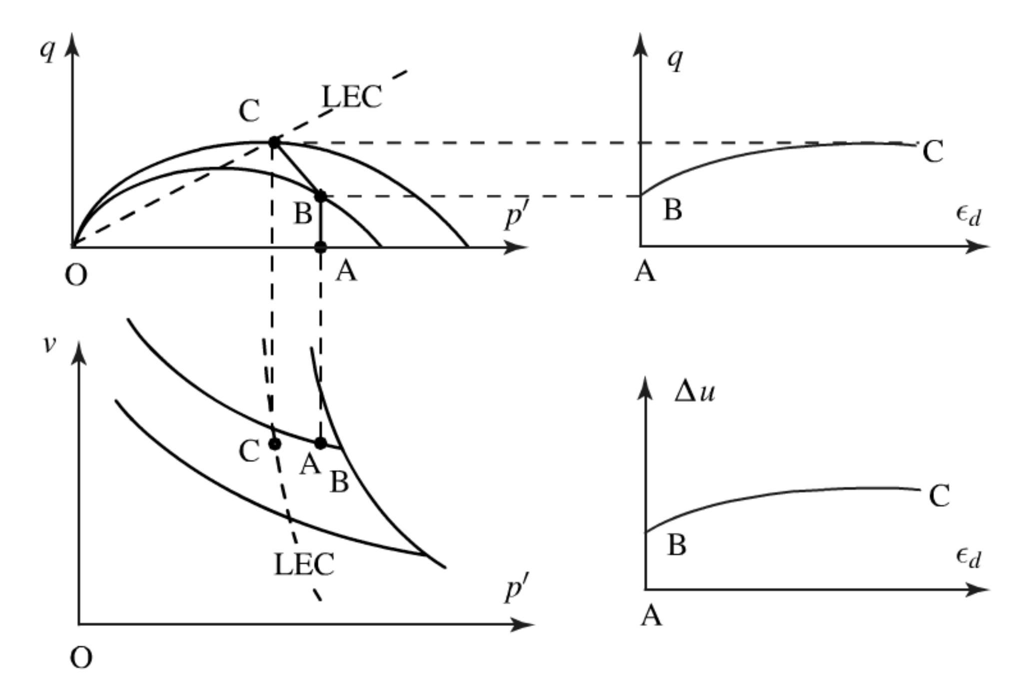


Figure 16.7 Essai triaxial CU sur un sol surconsolidé (d'après Lancellota [23]).

16.3.3 Chargement triaxial de type CU sur un sol surconsolidé

Cas du chargement triaxial standard

La figure 16.8 montre l'évolution des grandeurs d'état dans le cas d'un essai triaxial classique.

Cas du chargement triaxial non standard

Soit un sol surconsolidé sollicité lors d'un essai triaxial avec un chargement non standard de type CU. On le consolide puis on le décomprime à une pression inférieure à la pression de préconsolidation (Fig. 16.9). Le sol est dans l'état du point A dans le plan (q, p') et est donc dans le domaine élastique. Puis on applique le déviateur à pression hydrostatique effective constante et en conditions non drainées, ce qui l'amène au point B qui se situe sur la frontière du domaine élastique correspondant à l'état initial de surconsolidation.

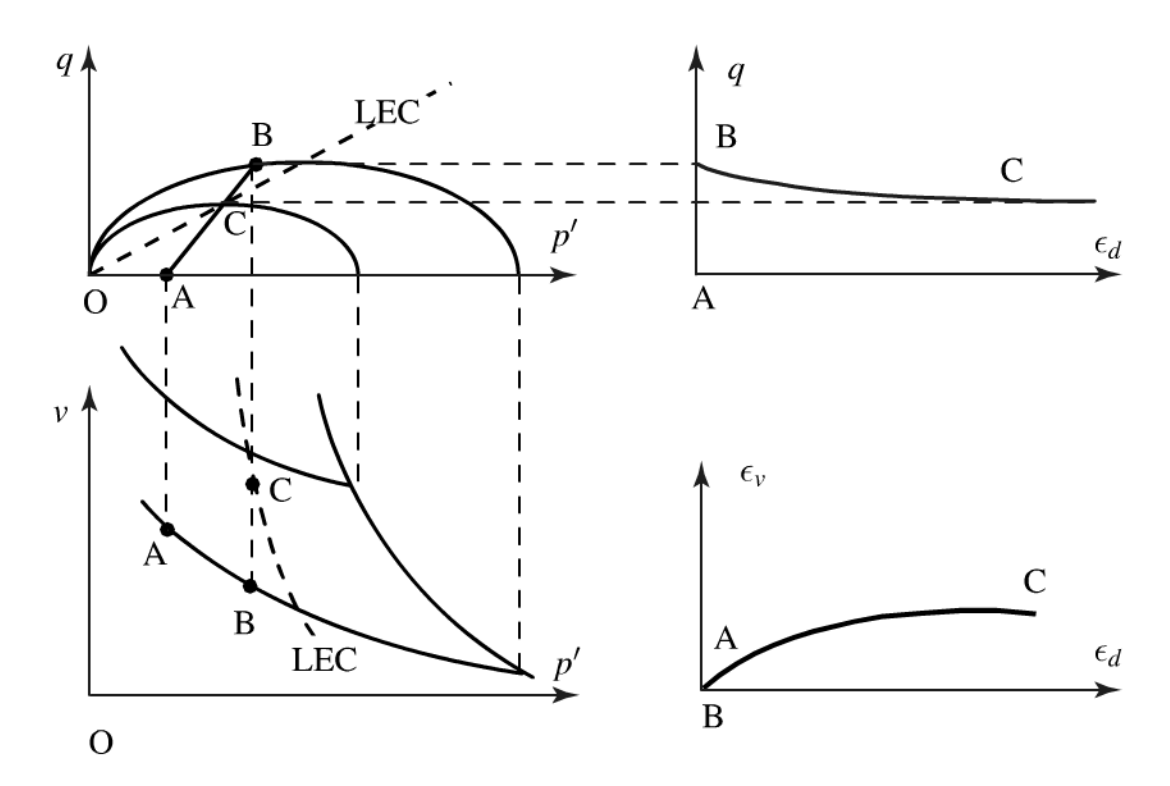


Figure 16.8 Essai triaxial CU sur un sol surconsolidé soumis à un chargement standard (d'après Lancellota [23]).

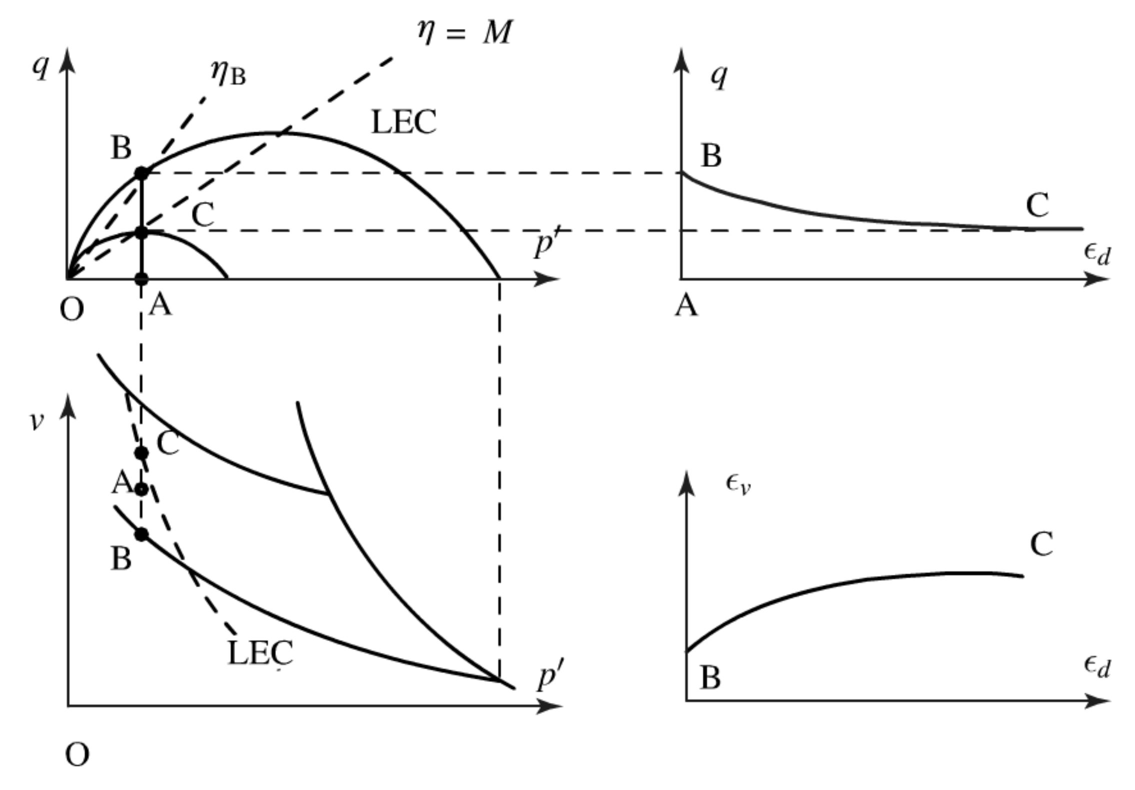


Figure 16.9 Essai triaxial CU sur un sol surconsolidé soumis à un chargement non standard (d'après Lancellota [23]).



En appliquant la même procédure que pour l'état normalement consolidé, on obtient :

$$\epsilon_v = \frac{\lambda - \kappa}{M}(\eta - \eta_B) \tag{16.37}$$

et la deuxième équation donne :

$$\epsilon_d = \frac{\lambda - \kappa}{M} \ln \frac{M - \eta_B}{M - \eta}. \tag{16.38}$$

Lors du chargement déviatorique, pour que les déformations axiales et donc déviatoriques augmentent, il faut que le coefficient η diminue donc que le point B se déplace vers le point critique C. Il y a donc un adoucissement du sol.

Cas du chargement triaxial non standard bis

Le sol est maintenant sollicité sous un chargement triaxial CU non standard légèrement différent du précédent (Fig. 16.10). Après le chargement élastique jusqu'au point B sans variation de pression effective (donc sans variation de volume spécifique), le sol se plastifie. Le sol étant non drainé, on a la condition de volume constant qui permet de déduire des équations d'évolution celle de la déformation déviatorique et l'équation de la variation de pression effective :

$$\ln \frac{p'}{p'_F} = -\left(1 - \frac{\kappa}{\lambda}\right) \frac{\eta - \eta_B}{M}, \tag{16.39}$$

$$\epsilon_d = \frac{\kappa(\lambda - \kappa)}{\lambda M} \ln \frac{M - \eta_B}{M - \eta}. \tag{16.40}$$

Pour que les déformations axiales augmentent, il faut que le rapport η diminue et que la pression effective augmente. On atteint le point critique C après être passé par des points intermédiaires tels que le déviateur a augmenté puis diminué. On constate que même en conditions non drainées le comportement n'est pas aussi simple que celui avec un critère de type Mises ou Tresca (déviateur maximal) le prévoit. Il est nécessaire d'utiliser un modèle plus complexe tel que celui de Cam Clay. De plus amples détails peuvent être trouvés dans les publications relatives à cette modélisation.

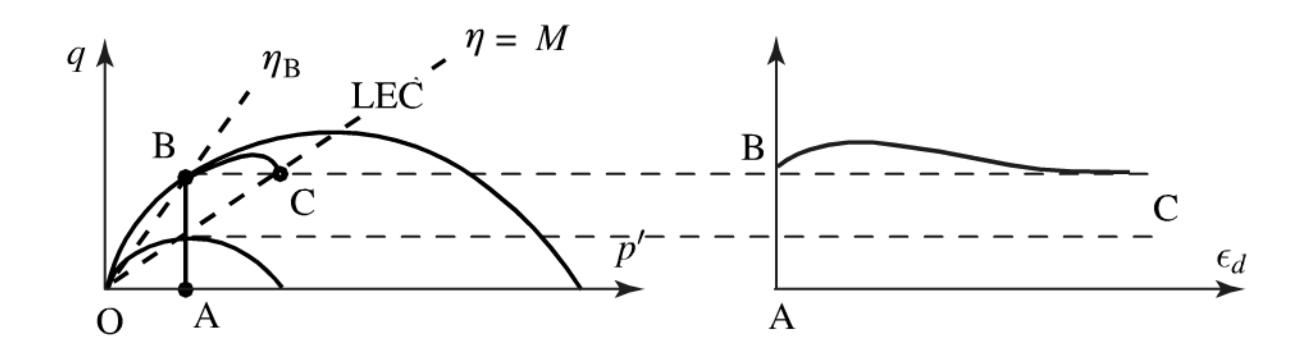


Figure 16.10 Essai triaxial CU sur un sol surconsolidé soumis à un chargement non standard bis (d'après Lancellota [23]).

Remarque

Ce modèle ne contient que peu de paramètres à identifier (élasticité, écrouissage et ligne d'état critique). Ces paramètres peuvent être obtenus à partir d'essais conventionnels (œdométrique et triaxial), ce qui constitue un intérêt évident.



G

Théorie du calcul à la rupture appliquée à la mécanique des sols

La présente partie est une introduction à la théorie du Calcul à la Rupture (Salençon, 1983 [37] ; de Buhan, 2007 [6]), et plus particulièrement à ses applications en Mécanique des Sols, où elle offre un cadre cohérent, rigoureux et efficace pour l'élaboration de méthodes de dimensionnement à la rupture des ouvrages de géotechnique : stabilité de pentes et d'ouvrages de soutènements, calcul de capacité portante de fondations superficielles... Après avoir présenté sur l'exemple élémentaire d'une structure, le principe du raisonnement sur lequel est fondée cette théorie, l'approche est développée sur celui de l'analyse de stabilité sous poids propre d'un talus vertical en sol cohérent et frottant.

17 Principe du raisonnement du calcul à la rupture : un exemple illustratif

La figure 17.1 représente un système réticulé formé de trois barres verticales identiques de longueur ℓ, numérotées de 1 à 3, fixées à leurs extrémités supérieures par des articulations sans frottement, et reliées entre elles en partie inférieure à un barreau rigide par le même type d'articulations. On désigne par $N_i \quad (i = 1,2,3)$ l'effort de traction-compression dans la barre i. Le chargement de cette structure est constitué par une force verticale d'intensité Q, comptée positivement vers le bas, appliquée sur le barreau à mi-distance des barres 2 et 3, et que l'on fait croître progressivement à partir d'une valeur nulle.

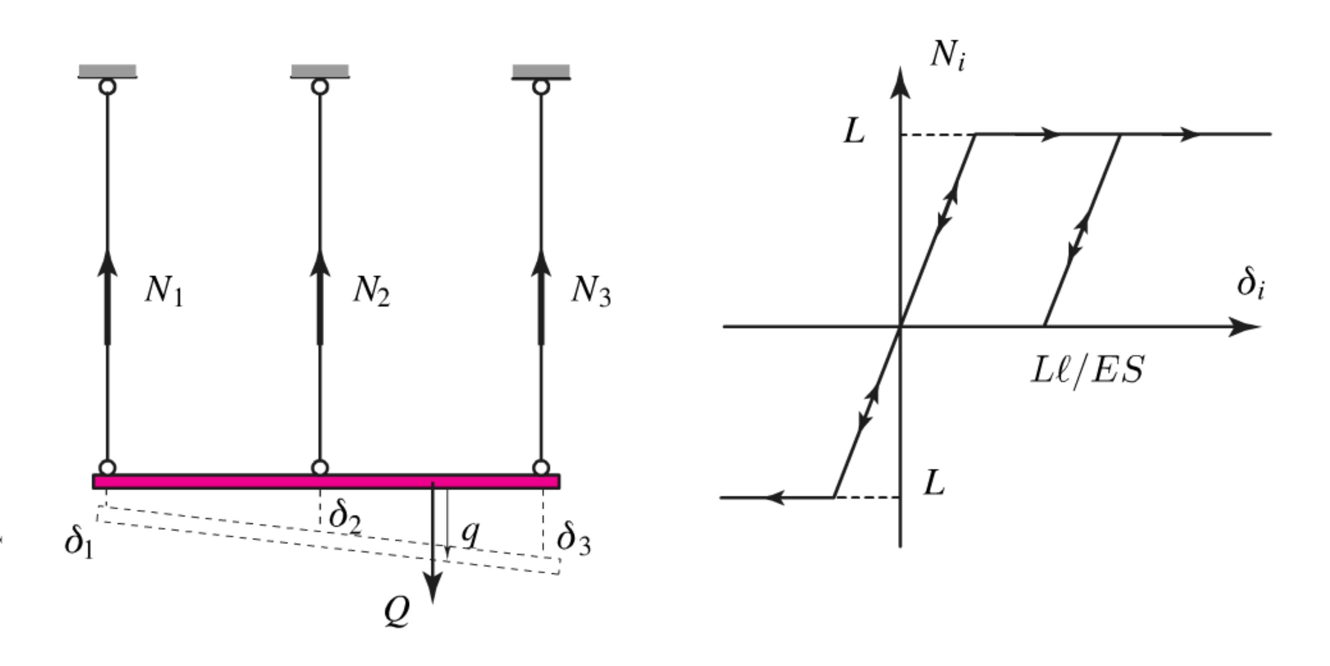


Figure 17.1 Calcul élasto-plastique d'un système réticulé.

Le comportement des barres est *élastique parfaitement plastique* schématisé par le diagramme effort-allongement de la figure 17.1, où S désigne la section des barres, E le module d'Young du matériau constitutif et L la limite d'élasticité en traction-compression. La structure étant initialement dans un état *naturel* ($N_i = 0$ pour $Q = 0$) on cherche à déterminer l'évolution de la structure à mesure que le chargement Q croît.

La résolution d'un tel problème d'évolution (supposée quasi statique) repose sur trois types d'équations.

1. Les *équations d'équilibre* valables indépendamment de la loi de comportement des barres, qui résultent dans le cas présent de l'écriture de l'équilibre en résultante et en moment du barreau horizontal.

$$N_1 + N_2 + N_3 = Q \quad \text{et} \quad N_3 - N_2 - 3N_1 = 0. \tag{17.1}$$

2. Les relations relatives au *comportement élasto-plastique* des barres, c'est-à-dire d'une part le *critère de plasticité*

$$|N_i| \leqslant L \quad i = 1, 2, 3 \tag{17.2}$$

d'autre part les relations entre les taux d'efforts et les taux d'allongement

$$i = 1,2,3 \quad \dot{\delta}_i = \frac{\dot{N}_i l}{ES} + \dot{\delta}_i^p \text{ avec } \dot{\delta}_i^p \begin{cases} \geqslant 0\,(\leqslant 0) & \text{si } N_i = +L(-L) \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{17.3}$$

où $\dot{\delta}_i^p$ désigne le taux d'allongement *plastique* de la barre numéro i.

3. La relation de *compatibilité géométrique* entre les allongements des barres, exprimant que leurs extrémités inférieures restent alignées (barreau indéformable).

$$\delta_1 + \delta_3 - 2\delta_2 = 0. \tag{17.4}$$

L'utilisation combinée de ces trois types d'équations permet d'expliciter la solution du problème d'évolution de la structure, synthétisée sous la forme d'une courbe effort-déplacement présentée sur la figure 17.2.

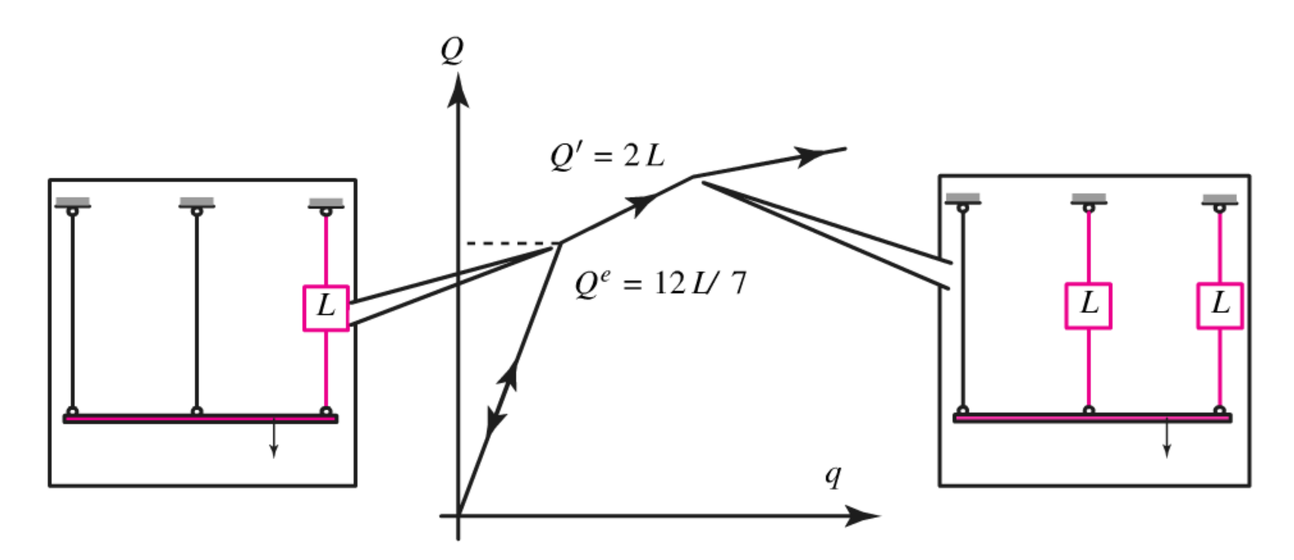


Figure 17.2 Courbe charge-déplacement relative à l'évolution élasto-plastique de la structure.

Cette courbe met en évidence trois phases d'évolution de la structure. Une phase élastique jusqu'à la *limite d'élasticité* $Q^e = 12L/7$, correspondant à la plastification en traction de la barre 3. Une phase élasto-plastique correspondant à l'accroissement du chargement au-delà de cette limite d'élasticité et jusqu'à la *charge limite* $Q^l = 2L$ associée à la plastification de la barre centrale. La troisième phase d'évolution est caractérisée par l'apparition d'un *mécanisme d'écoulement plastique libre* sous charge maintenue constante égale au chargement limite. Ce mécanisme correspond à un mouvement de rotation du barreau autour de son point d'accrochage avec la barre 1, fixe, les barres 2 et 3 subissant des allongements purement plastiques comme indiqué sur la figure 17.3.

Il n'est pas nécessaire d'effectuer l'ensemble de la démarche de résolution précédente pour montrer sur un tel exemple que la valeur de la charge limite $Q^l = +2L$ ne peut pas être dépassée. En effet, si nous considérons d'une part la condition d'équilibre du barreau en moment par rapport à son extrémité gauche, qui s'écrit

$$Q = \frac{4N_3 + 2N_2}{3}, \tag{17.5}$$

il apparaît immédiatement que cette relation n'est compatible avec les conditions de plasticité (Éq. 17.2) des barres que tant que le paramètre

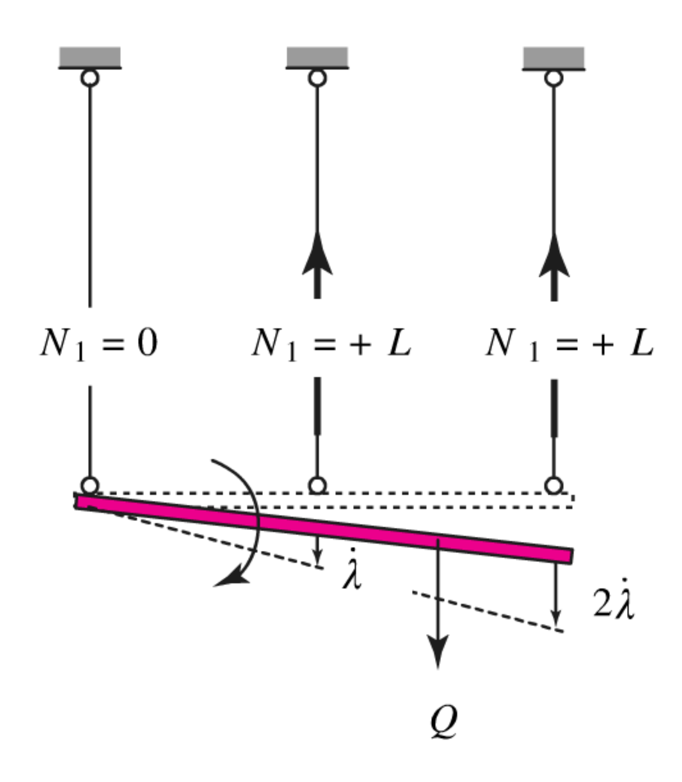


Figure 17.3 Charge limite et mécanisme d'écoulement plastique libre de la structure.

de chargement demeure à l'intérieur de l'intervalle $[-2L, +2L]$. Cela signifie *a contrario* que toute valeur de Q située *à l'extérieur* de cet intervalle ne peut être supportée par la structure.

Un tel raisonnement de *compatibilité entre les conditions d'équilibre de la structure et celles relatives au respect du critère de plasticité de tous ses éléments constitutifs*, peut être systématisé de la manière suivante. L'ensemble des chargements Q tels qu'il existe une distribution des efforts dans les barres (N_1, N_2, N_3) qui satisfasse simultanément les équations d'équilibre 17.1 ainsi que les critères de plasticité 17.2 est précisément constitué par l'intervalle $[-2L, +2L]$, dont les bornes inférieure et supérieure sont les valeurs de la charge limite de la structure selon le sens d'application de la charge.

$$Q \in [-2L, +2L] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists (N_1, N_2, N_3) \\ \text{satisfaisant 17.1 et 17.2.} \end{array} \right. \qquad (17.6)$$

18 De l'analyse limite au calcul à la rupture

On établit que, dans le cas où les barres ont un comportement élastique parfaitement plastique, avec règle d'écoulement plastique associé, le domaine $K = [-2L, +2L]$ des chargements supportés par la structure, et en particulier les chargements limites, sont indépendants :

- de *l'état initial* de la structure ;
- des *caractéristiques élastiques* de barres ;
- du *trajet de chargement* suivi.

Ceci est bien confirmé par le fait que la détermination de K ne fait appel à aucune de ces données, puisqu'elle repose exclusivement sur un raisonnement de compatibilité « *équilibre-critère* » : c'est le principe de l'*Analyse Limite*.

Il est alors possible de généraliser un tel raisonnement au cas où l'on ne dispose sur le comportement des matériaux d'aucune autre donnée que celle du critère, que nous qualifierons désormais de *critère de résistance ou de rupture*, c'est-à-dire d'une limitation portant sur les efforts intérieurs, sans aucune autre considération relative notamment à leur déformabilité. Le raisonnement précédent devient alors un raisonnement de *Calcul à la Rupture*, les chargements limites étant qualifiés de *chargements extrêmes*, qui constituent la frontière du domaine K, lequel prend la dénomination de *domaine des chargements potentiellement supportables* (Fig. 18.1).

Le qualificatif « *potentiellement* » vise à attirer l'attention sur le fait que, hormis dans le cas où le critère de résistance représente un critère de plasticité parfaite avec règle d'écoulement plastique associée, on n'est aucu-

nement assuré que le chargement extrême déterminé par le raisonnement de calcul à la rupture est effectivement atteint. Un retour sur l'exemple précédent permettra de clarifier ce dernier point.

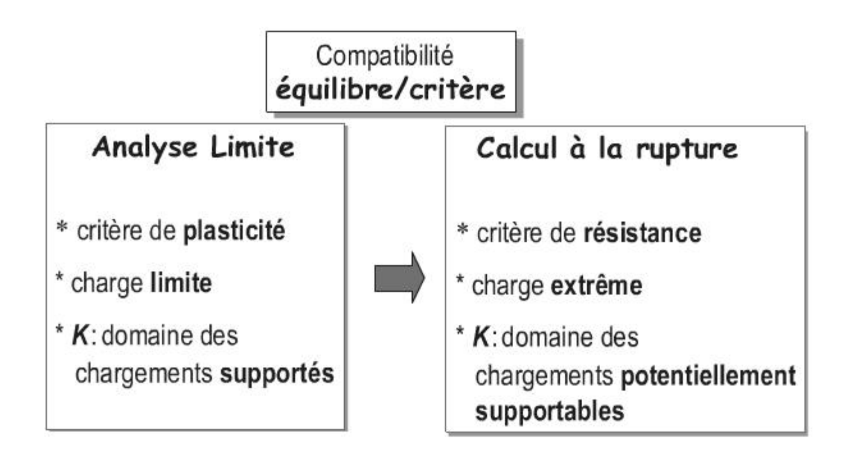


Figure 18.1 De l'Analyse Limite au *Calcul à la Rupture.*

Envisageons la situation extrême où le comportement des barres est de type élastique-*fragile* en traction, comme illustré sur le diagramme de la figure 18.2 : la valeur de l'effort dans la barre s'annule brutalement lorsque la limite d'élasticité en traction $+L$ est atteinte. Reprenant le calcul d'évolution de la structure dans l'hypothèse d'un tel comportement, il apparaît bien évidemment que la phase de comportement élastique n'est pas modifiée, la limite d'élasticité étant toujours égale à $12L/7$. En revanche cette valeur ne peut pas être dépassée, c'est-à-dire que la charge de ruine de la structure coïncide avec sa limite d'élasticité (Fig. 18.2).

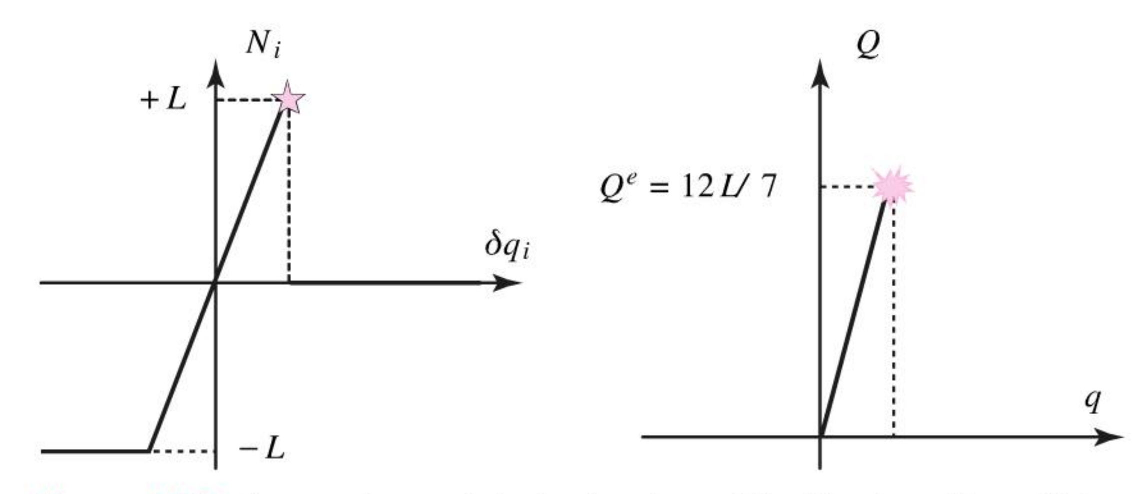


Figure 18.2 Comportement de la structure réticulée dans l'hypothèse d'un comportement élastique-fragile.

En effet, nous avons vu que la limite d'élasticité du système est associée au fait que la barre 3 atteint sa limite d'élasticité en traction. En raison du caractère fragile de cette dernière, la valeur de l'effort s'annule brutalement, de sorte que tout se passe comme si cette barre disparaissait. En vertu des équations d'équilibre 17.1, il est alors facile de vérifier que les efforts dans la structure isostatique formée des deux barres restantes valent respectivement

$$N_1 = -\frac{6L}{7} \text{ et } N_2 = +\frac{18L}{7}, \tag{18.1}$$

provoquant ainsi la rupture de la barre 2, et donc la ruine de la structure. Le diagramme charge-déplacement de la figure 18.2 illustre ce mode de ruine « catastrophique », qui se traduit en particulier par le fait que le chargement extrême ne peut pas être atteint. Il apparaît donc que dans une telle situation, l'approche calcul à la rupture conduit à surestimer considérablement la valeur de la charge de ruine effective de la structure.

Sur un plan général, on peut en conclure que la validité des résultats issus du calcul à la rupture est d'autant meilleure que le comportement local des matériaux constitutifs se rapproche de la situation idéale de l'élasto-plasticité parfaite. En pratique, il conviendra d'accorder une confiance d'autant plus grande à de tels résultats que le comportement des matériau est *ductile*. On se gardera *a contrario* de procéder à un tel calcul dans le cas où les éléments constitutifs manifestent un comportement par trop *fragile*.

S'il apparaît ainsi que les chargements extrêmes déterminés par le calcul à la rupture ne sont que *potentiellement* accessibles au terme d'un trajet de chargement, il est clair en revanche qu'aucun chargement situé à l'*extérieur* du domaine K ne pourra être atteint. En effet la compatibilité équilibre-résistance qu'exprime le raisonnement du calcul à la rupture – et qui constitue une condition *nécessaire* de stabilité de la structure – n'est alors même plus satisfaite.

19 Théorie du calcul à la rupture : approche statique par l'intérieur

19.1 Analyse de stabilité d'un talus vertical en sol purement cohérent

On s'intéresse au problème de la stabilité d'un talus vertical de hauteur H excavé dans un sol purement cohérent de cohésion C, dont le poids volumique est égal à γ (Fig. 19.1). Les différents éléments permettant de traiter un tel problème dans le cadre du formalisme du calcul à la rupture sont présentés ci-dessous, en effectuant à chaque fois le parallèle avec l'exemple de la structure à barres analysé aux chapitres 17 et 18.

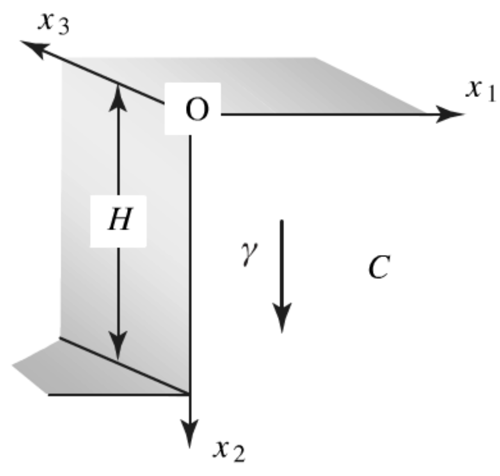


Figure 19.1 Stabilité sous poids propre d'un talus vertical en sol purement cohérent.

19.1.1 Chargement

Tandis qu'il est caractérisé dans le cas de la structure par l'intensité Q de l'effort vertical, le chargement du talus est constitué par le poids volumique γ du sol (force de type volumique), en l'absence de tout autre effort appliqué sur les surfaces extérieures.

Efforts intérieurs

Nous avons vu que, dans le cas de la structure, les efforts intérieurs étaient définis par le triplet (N_1, N_2, N_3). Le sol constitutif du talus étant modélisé comme un *milieu continu tridimensionnel*, les efforts intérieurs y seront classiquement décrits par des champs de *contrainte*, notés $\underline{\underline{\sigma}}$.

Équilibre

Les conditions d'équilibre de la structure se réduisent aux deux équations 17.1 portant sur le triplet des efforts (N_1, N_2, N_3) : la structure est *hyperstatique de degré* 1. Dans le cas du talus, ces équations s'écrivent

$$\underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} + \gamma \underline{e}_2 = \underline{0} \tag{19.1}$$

en tout point où le champ de contrainte est continûment différentiable, ainsi que

$$[\,\underline{\underline{\sigma}}\,] \cdot \underline{n} = \underline{0} \tag{19.2}$$

à la traversée d'une éventuelle *surface de discontinuité* du champ $\underline{\underline{\sigma}}$, où $[\,\underline{\underline{\sigma}}\,]$ désigne le saut de ce champ à la traversée d'une telle surface suivant la normale unitaire $\underline{n}$ (Fig. 19.2). Ces équations doivent être complétées par les *conditions aux limites en contrainte* qui, dans le cas du talus vertical s'écrivent simplement

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0} \tag{19.3}$$

où $\underline{n}$ désigne la normale unitaire extérieure en tout point du bord.

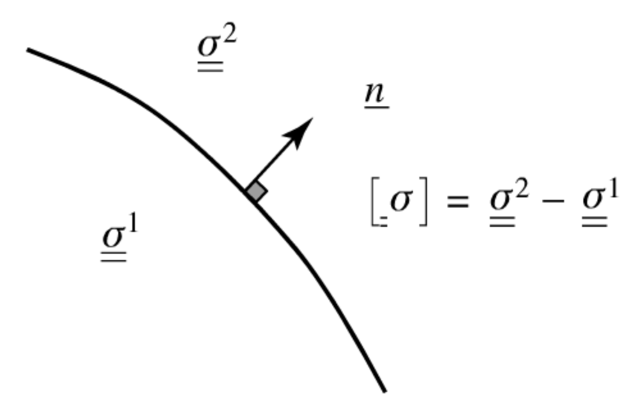


Figure 19.2 Surface de discontinuité d'un champ de contrainte.

Critère de résistance

Il s'exprime sous la forme d'une limitation portant sur les efforts intérieurs, c'est-à-dire simplement par le biais d'une double inégalité de type 17.2 pour chacune des barres de la structure réticulée, tandis que, pour le sol purement cohérent qui constitue le talus, le *critère de Tresca* est adopté

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I - \sigma_{III} - 2C \leqslant 0 \tag{19.4}$$

où $\sigma_I \geqslant \sigma_{II} \geqslant \sigma_{III}$ représentent les *contraintes principales*. Un tel critère est classiquement représenté en Mécanique des sols par le biais d'une *courbe intrinsèque* qui délimite dans le plan de Mohr (σ, τ) les vecteurs-contrainte admissibles s'exerçant sur une facette quelconque du matériau. Dans le cas d'espèce, cette courbe se réduit à deux droites d'équations $\tau = \pm C$, ce qui signifie que le critère de Tresca peut s'exprimer de manière parfaitement équivalente à 19.4, en écrivant que le module de la contrainte de cisaillement sur n'importe quelle facette demeure inférieur ou égal à C, appelée d'ailleurs *résistance au cisaillement* du sol (Fig. 19.3) :

$$\sigma_I - \sigma_{III} - 2C \leqslant 0 \Leftrightarrow \forall \underline{n}, \left|\tau(\underline{n})\right| \leqslant C. \tag{19.5}$$

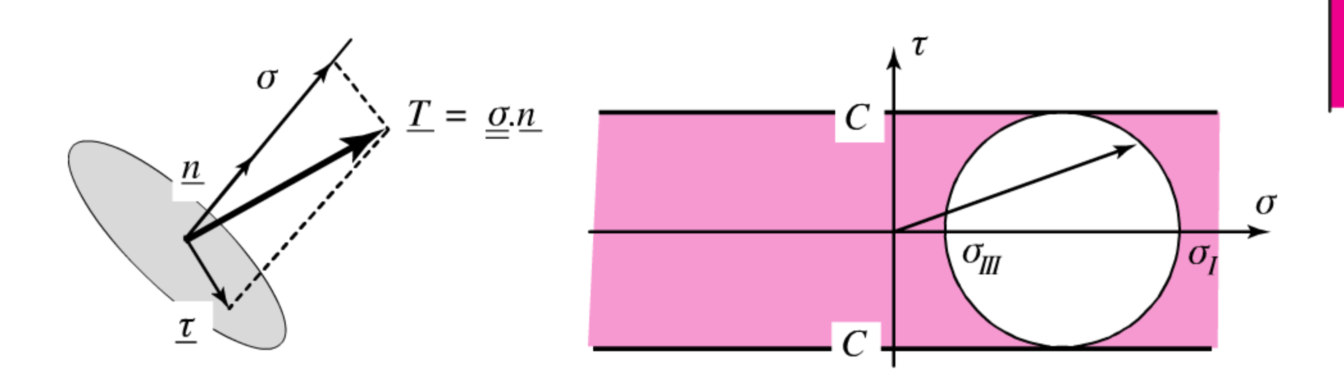


Figure 19.3 Courbe intrinsèque relative au critère de Tresca.

19.2 Position du problème de calcul à la rupture ; notion de facteur de stabilité de l'ouvrage

Compte tenu du parallèle fait entre l'exemple de la structure réticulée et celui de la stabilité de l'excavation, on peut directement étendre le raisonnement du calcul à la rupture à ce dernier ouvrage, en se référant au domaine des chargements potentiellement supportables qui n'est autre qu'un intervalle de la forme $[\gamma^-,\gamma^+]$ sur la droite du paramètre de chargement γ, supposé variable. Ce domaine est défini comme l'ensemble des valeurs γ du paramètre de chargement pour lesquels il est possible de mettre en évidence un champ de contrainte dans la massif de sol en équilibre (*statiquement admissible*) avec le chargement γ tout en respectant le critère de résistance du sol en tout point :

$$\gamma \in [\gamma^-,\gamma^+] \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}}\, S.A.\gamma \\ \forall \underline{x},\, \sigma_I - \sigma_{III} - 2C \leqslant 0 \end{cases} \tag{19.6}$$

Une telle problématique pourrait paraître quelque peu éloignée de celle de l'ingénieur géotechnicien pour lequel le poids volumique du terrain γ ainsi que la cohésion C de ce dernier constituant des données, il s'agit d'évaluer la profondeur maximale H^+ de l'excavation au-delà de laquelle l'ouvrage sera instable. En réalité, loin d'être opposés, ces deux points de vue se rejoignent, puisque de simples considérations d'analyse dimensionnelle montrent que le seul facteur *sans dimension* qu'il est possible de former à partir des données du problème (γ,H,C) est $\gamma H/C$ que nous appellerons *facteur de stabilité de l'ouvrage*, quantité positive dont on recherche la *valeur extrême*

$$\left(\frac{\gamma H}{C}\right)^+ = \frac{\gamma^+ H}{C} = \frac{\gamma H^+}{C}, \tag{19.7}$$

d'où

$$\frac{\gamma H}{C} \leqslant \left(\frac{\gamma H}{C}\right)^+ \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}}\, S.A.\gamma \\ \forall \underline{x},\, \sigma_I - \sigma_{III} - 2C \leqslant 0 \end{cases} \tag{19.8}$$

19.3 Approche statique par l'intérieur

Cette approche consiste à mettre en œuvre la définition (Éq. 19.8) de la valeur extrême du facteur de stabilité de l'ouvrage, en s'efforçant de construire des champs de contrainte statiquement admissibles avec les données en efforts et qui respectent en tout point le critère de résistance du sol. Il importe de remarquer qu'à la différence de l'exemple de la structure réticulée traité au chapitre 17, et plus généralement des systèmes dépendant d'un nombre fini d'inconnues hyperstatiques, les champs de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ forment un espace de dimension infinie non dénombrable. Il ne sera donc pas possible d'explorer de manière exhaustive un tel espace, et il faudra donc se limiter à considérer des classes particulières dépendant d'un nombre fini de paramètres, comme nous allons le voir immédiatement sur l'exemple du talus. Ayant subdivisé le massif de sol en trois zones comme indiqué sur la figure 19.4, on considère le champ de contrainte défini comme suit dans chacune des zones :

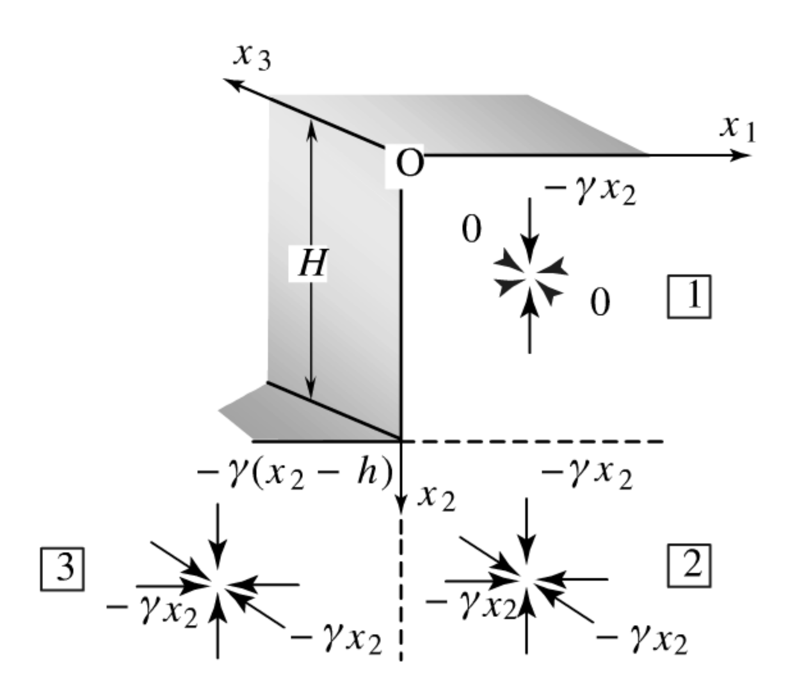


Figure 19.4 Approche statique par champ de contrainte à trois zones.

Zone 1 ($x_1 \geqslant 0,\ H \geqslant x_2 \geqslant 0$)

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\gamma x_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2. \tag{19.9}$$

Zone 2 ($x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant H$)

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\gamma x_2 \underline{\underline{I}}. \tag{19.10}$$

Zone 3 ($x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant H$)

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\gamma(x_2 - H)\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \gamma(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3). \tag{19.11}$$

Il est facile de voir qu'un tel champ vérifie bien l'équation d'équilibre 19.1 dans chacune des zones séparément, ainsi que l'équation de saut 19.2 à la traversée de chaque plan de séparation entre zones (pointillés sur la figure). Il est donc bien statiquement admissible avec la valeur γ du paramètre de chargement. Par ailleurs la condition de résistance (critère de Tresca 19.4) s'écrit dans chaque zone :

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \begin{cases} 0 - (-\gamma x_2) \leqslant 2C & \text{zone 1} \\ (-\gamma x_2) - (-\gamma x_2) = 0 \leqslant 2C & \text{zone 2} \\ -\gamma(x_2 - H) - (-\gamma x_2) = \gamma H \leqslant 2C & \text{zone 3} \end{cases} \tag{19.12}$$

d'où il ressort qu'un tel champ de contrainte vérifie le critère de résistance du sol en tout point si et seulement si la condition suivante est satisfaite

$$\frac{\gamma H}{C} \leqslant 2. \tag{19.13}$$

Il apparaît que tant que l'inégalité 19.13 est satisfaite, il est possible d'exhiber au moins un champ de contrainte qui soit en équilibre avec le chargement (poids volumique du sol), tout en respectant le critère de résistance du sol, démontrant ainsi que le talus est potentiellement stable

$$\frac{\gamma H}{C} \leqslant 2 \Rightarrow \frac{\gamma H}{C} \leqslant \left(\frac{\gamma H}{C}\right)^{+}, \tag{19.14}$$

d'où bien évidemment l'obtention d'un *minorant* de la valeur extrême du facteur de stabilité de l'ouvrage.

$$\left(\frac{\gamma H}{C}\right)^{+} \geqslant 2. \qquad (19.15)$$

Il est évidemment possible d'améliorer une telle approche, c'est-à-dire d'augmenter la minoration précédente, en considérant d'autres champs de contrainte plus sophistiqués que le champ à trois zones que nous avons considéré. De tels champs peuvent être construits en recourant par exemple à des méthodes numériques (discrétisation du massif en « éléments finis » qui constituent des zones à l'intérieur desquelles le champ est continu et différentiable, tandis que les segments de séparation entre zones forment des lignes de discontinuité de tels champs). La meilleure borne statique obtenue à ce jour par de telles méthodes est

$$\left(\frac{\gamma H}{C}\right)^{+} \geqslant 3{,}76. \qquad (19.16)$$

La figure 19.5 récapitule les résultats de cette approche statique dite « par l'intérieur » du domaine de stabilité du talus vertical. L'approche cinématique « par l'extérieur » que nous allons maintenant présenter va nous conduire à une *majoration* du facteur de stabilité extrême, et donc par combinaison avec l'approche statique par l'intérieur à un *encadrement* de cette dernière.

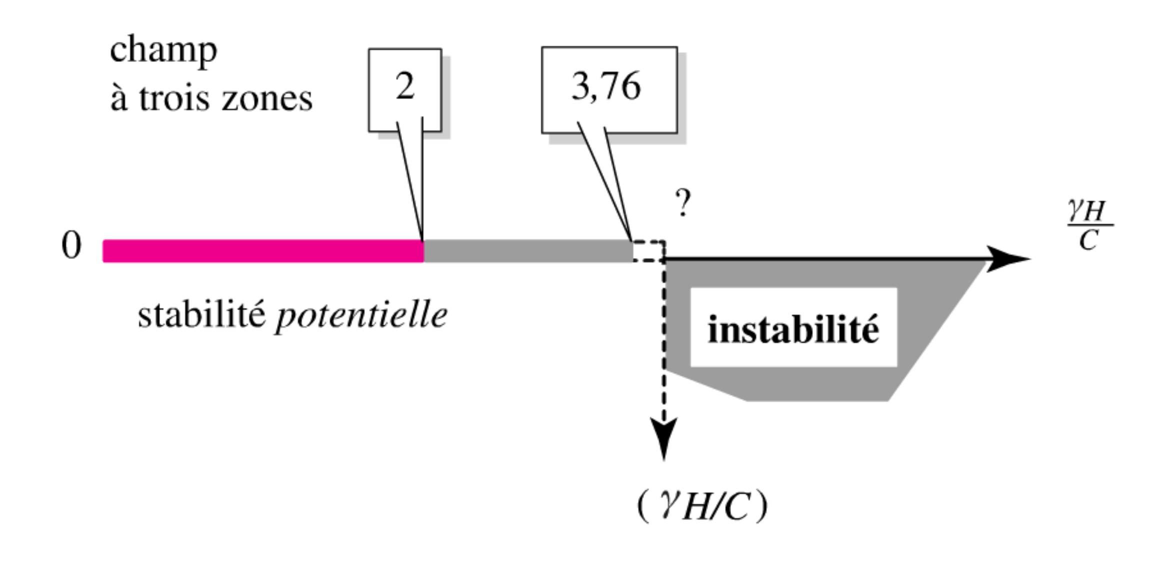


Figure 19.5 Résultats de l'approche statique par l'intérieur.

20 Approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture

Cette approche repose sur la dualisation des équations d'équilibre à travers le *Principe des Puissances Virtuelles* dont l'énoncé a été rappelé au paragraphe 7.5 du chapitre 7. Prenant l'exemple du talus vertical, on considère un champ de vitesse *virtuel* auquel on impose d'être *cinématiquement admissible* (C.A.), c'est-à-dire simplement d'être nul à l'infini. Etant donné un champ de contrainte quelconque *statiquement admissible* avec le chargement γ, c'est-à-dire vérifiant les équations 19.1 et 19.2, le *Principe de Puissances Virtuelles* stipule que la *puissance virtuelle des efforts extérieurs* (poids volumique) développée dans un tel champ est égale à la puissance virtuelle du champ de contrainte dans le champ de taux de déformation associé au champ de vitesse, cette dernière quantité étant appelée *puissance virtuelle de déformation*

$$\forall \underline{\hat{U}} \quad C.A. \quad P_e(\underline{\hat{U}}) = P_d(\underline{\hat{U}}). \tag{20.1}$$

Les expressions de ces deux puissances sont les suivantes :

- Puissance virtuelle des efforts extérieurs

$$P_e(\underline{\hat{U}}) = \int_\Omega \gamma \underline{e}_2 \,.\, \underline{\hat{U}} \, d\Omega = \gamma \left(\int_\Omega \hat{U}_2 \, d\Omega \right). \tag{20.2}$$

- Puissance virtuelle de déformation

$$P_d(\underline{\hat{U}}) = \int_\Omega (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{d}}}) \, d\Omega + \int_\Sigma (\underline{\underline{\sigma}} \,.\, \underline{n}) \,.\, [\underline{\hat{U}}] \, d\Sigma, \tag{20.3}$$

où $\underline{\underline{\hat{d}}}$ désigne le champ de taux de déformation virtuel associé au champ de vitesse, tandis que $[\underline{\hat{U}}]$ représente le *saut de vitesse* à la traversée d'une

surface de discontinuité Σ du champ $\underline{\hat{U}}$, calculé en suivant la normale $\underline{n}$. Il convient de souligner que la prise en compte de telles surfaces de discontinuité du champ $\underline{\hat{U}}$ est non seulement permise par le caractère virtuel de ce dernier, mais se révélera en pratique très commode dans la mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture.

20.1 Approche cinématique : notion de puissance résistante maximale

Si on revient à la définition 19.8 de la valeur extrême du facteur de stabilité :

$$\frac{\gamma H}{C} \leqslant \left(\frac{\gamma H}{C}\right)^{+} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}}\, S.A.\, \gamma \\ \forall \underline{x},\, \sigma_I - \sigma_{III} - 2C \leqslant 0, \end{cases} \tag{20.4}$$

la dualisation de l'équilibre par le *P.P.V.* conduit à la définition équivalente

$$\frac{\gamma H}{C} \leqslant \left(\frac{\gamma H}{C}\right)^{+} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}};\ \forall \underline{\hat{U}}\, C.A. \quad P_e(\underline{\hat{U}}) = P_d(\underline{\hat{U}}) \\ \forall \underline{x},\, \sigma_I - \sigma_{III} - 2C \leqslant 0. \end{cases} \tag{20.5}$$

On introduit alors la notion de *puissance résistante maximale* définie par :

$$P_m(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{\underline{\hat{d}}})\, d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\underline{n};\, [\underline{\hat{U}}])\, d\Sigma, \tag{20.6}$$

où les fonctions $\pi(.)$ sont définies comme suit

$$\begin{cases} \pi(\underline{\underline{\hat{d}}}) = \sup\{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{d}}}\,;\ \sigma_I - \sigma_{III} \leqslant 2C\} \\ \pi(\underline{n}\,;\ [\underline{\hat{U}}]) = \sup\{(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}).[\underline{\hat{U}}]\,;\ \sigma_I - \sigma_{III} \leqslant 2C\}. \end{cases} \tag{20.7}$$

Cette quantité représente la puissance de déformation maximale développée par un champ de contrainte quelconque dans le champ de vitesse

virtuel considéré, *compte tenu de la limitation apportée en chaque point par le critère de résistance*

$$\forall \underline{\hat{U}}, \forall \underline{\underline{\sigma}}; \forall \underline{x}; \sigma_I - \sigma_{III} \leqslant 2C \quad P_d(\underline{\hat{U}}) \leqslant P_m(\underline{\hat{U}}). \tag{20.8}$$

Il résulte alors immédiatement des équations 20.5 et 20.7 que

$$\frac{\gamma H}{C} \leqslant \left(\frac{\gamma H}{C}\right)^+ \Leftrightarrow \forall \underline{\hat{U}}\ C.A. \quad P_e(\underline{\hat{U}}) \leqslant P_m(\underline{\hat{U}}). \tag{20.9}$$

Compte tenu de l'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs (poids propre) donnée par 20.2, et en ne considérant que les champs de vitesse dans lesquels cette puissance est strictement positive

$$\frac{\gamma H}{C} \leqslant \left(\frac{\gamma H}{C}\right)^+ \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \underline{\hat{U}}\ C.A.;\ \int_\Omega \hat{U}_2\, d\Omega > 0 \\ \dfrac{\gamma H}{C} \leqslant \dfrac{H}{C} \dfrac{P_m(\underline{\hat{U}})}{\int_\Omega \hat{U}_2\, d\Omega} \end{cases} \tag{20.10}$$

On en déduit donc un *majorant* du facteur de stabilité extrême

$$\forall \underline{\hat{U}}\ C.A.;\ \int_\Omega \hat{U}_2\, d\Omega > 0 \quad \left(\frac{\gamma H}{C}\right)^+ \leqslant \frac{H}{C} \frac{P_m(\underline{\hat{U}})}{\int_\Omega \hat{U}_2\, d\Omega}. \tag{20.11}$$

20.2 Première mise en œuvre : mécanisme de « bloc en translation »

On se propose d'appliquer l'inégalité 2.10 en considérant le champ de vitesse suivant. Un bloc triangulaire OAB est animé d'un mouvement de translation caractérisé par le vecteur constant $\underline{\hat{U}}$, tandis que la vitesse est nulle dans le reste du massif (Fig. 20.1) :

$$\underline{\hat{U}}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{\hat{U}} & \text{si } \underline{x} \in OAB \\ \underline{0} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{20.12}$$

20

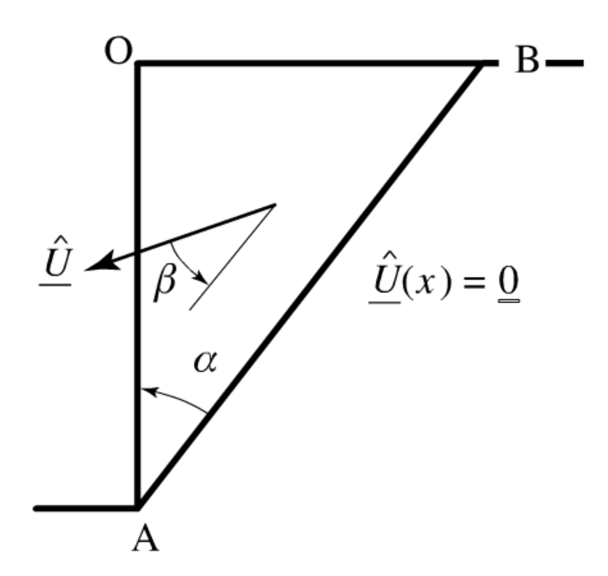


Figure 20.1 Approche cinématique par bloc triangulaire en translation.

On calcule tout d'abord la puissance des efforts extérieurs dans un tel champ, soit :

$$P_e(\underline{\hat{U}}) = \gamma\left(\int_\Omega \hat{U}_2\, d\Omega\right) = \frac{1}{2}\gamma H^2 \left|\underline{\hat{U}}\right| \tan\alpha \cos(\alpha+\beta). \quad (20.13)$$

Par ailleurs, la valeur du taux de déformation $\underline{\underline{\hat{d}}}$ étant nulle en tout point, l'expression 2.6 de la puissance résistante maximale se réduit au seul terme relatif à la discontinuité de vitesse entre le bloc et le reste du massif. L'évaluation de ce dernier requiert le calcul de la fonction π correspondant au critère de Tresca

$$\pi(\underline{n}\,; [\underline{\hat{U}}]) = \sup\{(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}).[\underline{\hat{U}}];\, \sigma_I - \sigma_{III} \leqslant 2C\}, \quad (20.14)$$

qui peut encore s'écrire

$$\pi(\underline{n}\,; [\underline{\hat{U}}]) = \sup\{(\sigma\underline{n} + \tau\underline{t}).[\underline{\hat{U}}];\, |\tau| \leqslant C\}, \quad (20.15)$$

compte tenu de l'expression 19.5 du critère de résistance sous la forme d'une limitation portant sur la seule contrainte de cisaillement. Le calcul de cette fonction peut être réalisé en se référant au domaine de résistan-

ce du critère dans le plan de Mohr, délimité par la courbe intrinsèque (Fig. 19.3). Deux cas de figure se présentent alors, illustrés par la figure 20.2 :

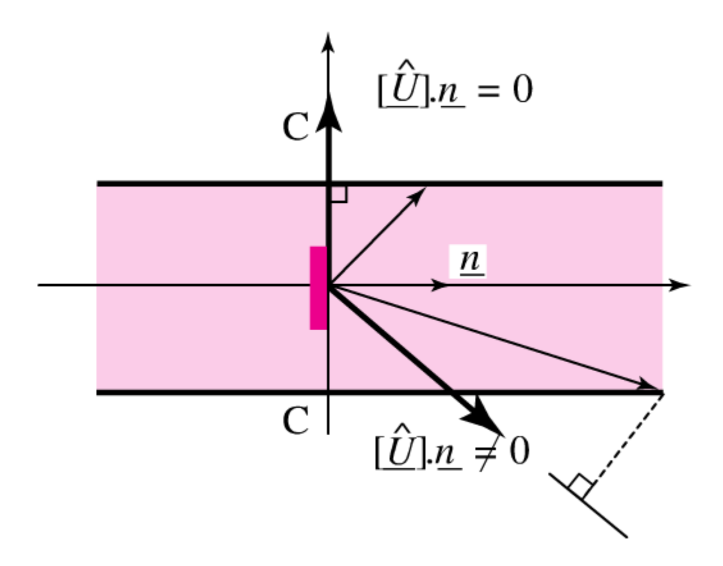


Figure 20.2 Calcul de la fonction π pour un sol purement cohérent (critère de Tresca).

La composante normale de la discontinuité de vitesse est non nulle. Il en résulte immédiatement que, puisque la contrainte normale n'est pas limitée par le critère de Tresca, la valeur correspondante de la fonction π est infinie :

$$[\underline{\hat{U}}].\underline{n} \neq 0 \Rightarrow \pi(\underline{n}\,;[\underline{\hat{U}}]) = \infty. \tag{20.16}$$

La discontinuité de vitesse est *purement tangentielle* ($\beta = 0$ ou π). La valeur prise par la fonction π est bornée, égale à

$$[\underline{\hat{U}}].\underline{n} = 0 \Rightarrow \pi(\underline{n}\,;[\underline{\hat{U}}]) = C[\underline{\hat{U}}]. \tag{20.17}$$

Le calcul de la puissance résistante maximale relative au mécanisme par bloc en translation vaut par conséquent

$$P_m(\underline{\hat{U}}) = \int_\Sigma \pi(\underline{n}\,;[\underline{\hat{U}}])\,d\Sigma = \frac{H}{\cos\alpha} C \left|\underline{\hat{U}}\right| \tag{20.18}$$

puisque la discontinuité de vitesse entre le bloc et le reste du massif est égale à la vitesse du bloc. L'inégalité 20.11 devient ici en choisissant $\beta = 0$ et en simplifiant ses deux membres par $\left|\underline{\hat{U}}\right|$

$$\forall \alpha \in]0{,}90°[\quad \left(\frac{\gamma H}{C}\right)^{+} \leqslant \frac{2}{\sin\alpha\cos\alpha}, \tag{20.19}$$

la majoration optimale, obtenue pour $\alpha = 45°$, étant

$$\left(\frac{\gamma H}{C}\right)^{+} \leqslant 4. \tag{20.20}$$

Commentaire

La condition de discontinuité de vitesse tangentielle $[\underline{\hat{U}}].\underline{n}$ est appelée *condition de pertinence* du champ de vitesse virtuel, dans le sens où elle constitue la condition pour que la fonction π, et donc la puissance résistante maximale, prenne une *valeur finie*. En effet, dans l'hypothèse où cette condition ne serait pas vérifiée, cette puissance prendrait une valeur infinie, conduisant alors d'après l'équation 20.11 à une majoration infinie (donc sans intérêt !) du facteur de stabilité extrême du talus. La condition de pertinence est donc une condition de nature strictement mathématique, assurant le calcul de la puissance résistante maximale et donc l'obtention d'un majorant effectif.

20.3 Amélioration de l'approche cinématique : les mécanismes de « bloc en rotation »

On examine maintenant une seconde classe de champs de vitesses virtuelles dans laquelle un bloc tel que OAB, délimité du reste de l'ouvrage par une surface quelconque passant par le pied du talus (courbe dans le plan de la figure 20.3), est animé d'un mouvement virtuel de rotation de vitesse $\omega\underline{e}_3$ autour d'un centre O' quelconque.

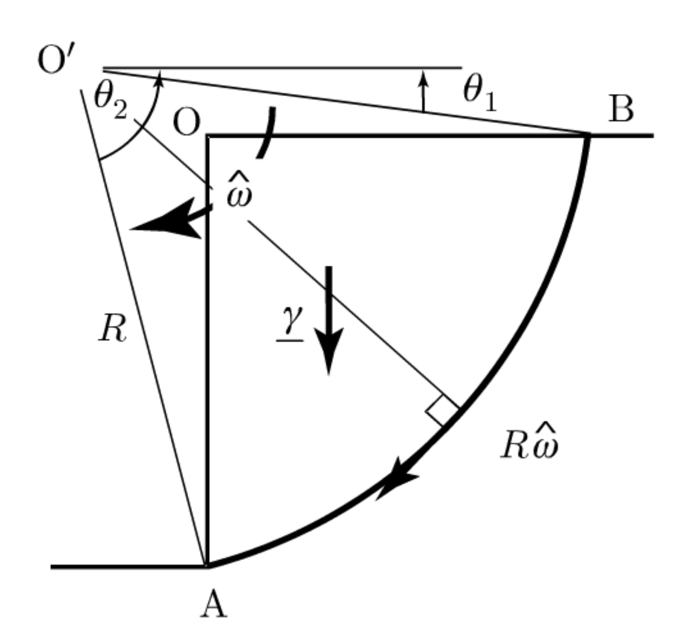


Figure 20.3 Analyse de stabilité du talus par des mécanismes de bloc en rotation.

Tout comme dans le cas du mécanisme par bloc en translation, le taux de déformation est nul en tout point, la courbe AB constituant une ligne de discontinuité de vitesse. La condition de *pertinence* imposant que cette discontinuité de vitesse soit *purement tangentielle*, il en résulte immédiatement que la courbe AB est un *arc de cercle centré au point* O', repéré par les angles θ_1 et θ_2. La puissance résistante maximale vaut par conséquent

$$\begin{aligned} P_m(\underline{\hat{U}}) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} CR\left|\hat{\omega}\right| R\,d\theta = CR^2\left|\hat{\omega}\right|(\theta_2-\theta_1) \\ &= CH^2\left|\hat{\omega}\right|\frac{\theta_2-\theta_1}{(\sin\theta_2-\ \sin\theta_1)^2}. \end{aligned} \tag{20.21}$$

De même la puissance virtuelle des efforts extérieurs peut s'écrire sous la forme

$$P_e(\underline{\hat{U}}) = \int_{\mathrm{OAB}} \gamma\underline{e}_1\underline{\hat{U}}\,dx_1dx_2 = \int_{\partial(OAB)} \gamma x_2\underline{\hat{U}}\,.\,\underline{n}\,ds, \tag{20.22}$$

où l'on a tenu compte de l'identité

$$\gamma\underline{e}_2\,.\,\underline{\hat{U}} = \underline{\mathrm{grad}}\,(\gamma x_2)\,.\,\underline{\hat{U}} = \mathrm{div}\,(\gamma x_2\underline{\hat{U}}) - \gamma x_2\underbrace{\mathrm{div}\,\underline{\hat{U}}}_{=0}, \tag{20.23}$$

20

de sorte que l'expression se réduit à

$$P_e(\underline{\hat{U}}) = \int_0^H \gamma x_2 \underline{\hat{U}} \, . \, (-\underline{e}_1) \, dx_2, \tag{20.24}$$

soit après calculs

$$P_e(\underline{\hat{U}}) = \gamma \omega H^3 \frac{2 \sin \theta_2 + \sin \theta_1}{6(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)}. \tag{20.25}$$

La majoration 20.11 devient alors, en prenant $\hat{\omega} \geqslant 0$

$$\left(\frac{\gamma H}{C}\right)^+ \leqslant f(\theta_1,\theta_2) = \frac{6(\theta_2 - \theta_1)}{(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)(2 \sin \theta_2 + \sin \theta_1)}, \tag{20.26}$$

le majorant optimal étant :

$$\left(\frac{\gamma H}{C}\right)^+ \leqslant \min_{(\theta_1,\theta_2)} f(\theta_1,\theta_2) \approx 3{,}83. \tag{20.27}$$

La figure 20.4 fait le bilan des diverses approches (statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur) appliquées au problème de l'analyse de stabilité du talus vertical. On observe en particulier que le majorant obtenu par l'utilisation de mécanismes de bloc en rotation est meilleur que celui obtenu par des mécanismes de bloc en translation. Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où le premier ensemble de mécanismes contient le second.

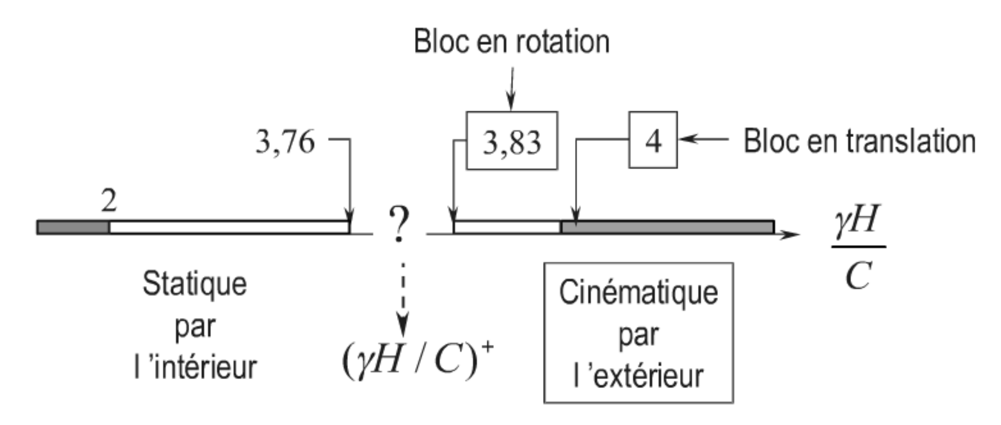


Figure 20.4 Récapitulatif des approches statiques par l'intérieur et cinématiques par l'extérieur.

21 Le cas des sols frottants

Nous nous proposons de reprendre l'analyse de stabilité d'un talus vertical déjà étudiée aux deux chapitres précédents dans le cas d'un sol purement cohérent, en supposant désormais que ce dernier est frottant, c'est-à-dire obéit à un critère de résistance de Coulomb, défini par la condition

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = (\sigma_I - \sigma_{III}) + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin\phi - 2C \cos\phi \leqslant 0. \qquad (21.1)$$

où σ_I et σ_{III} désignent respectivement les contraintes principales majeure et mineure, C la cohésion du sol et ϕ son angle de frottement interne. La courbe intrinsèque qui délimite dans le plan de Mohr le domaine des vecteurs-contrainte admissibles sur une facette quelconque du matériau, est représenté sur la figure 21.1. Elle est constituée de deux droites inclinées d'angles égaux à $\pm\phi$ par rapport à l'axe des contraintes normales et coupant l'axe des contraintes tangentielles en $\pm C$. Le critère peut donc s'écrire de manière équivalente

$$\begin{gathered} f(\underline{\underline{\sigma}}) = (\sigma_I - \sigma_{III}) + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin\phi - 2C \cos\phi \leqslant 0 \\ \text{où} \\ \forall \underline{n},\ \left|\underline{\tau}(\underline{n})\right| \leqslant C - \sigma(\underline{n}) \tan\phi \end{gathered} \qquad (21.2)$$

de sorte que, à la différence du critère de Tresca adopté pour décrire les capacités de résistance d'un sol purement cohérent, la « résistance au cisaillement » d'un sol frottant dépend de la valeur de la contrainte normale $\sigma(\underline{n})$.



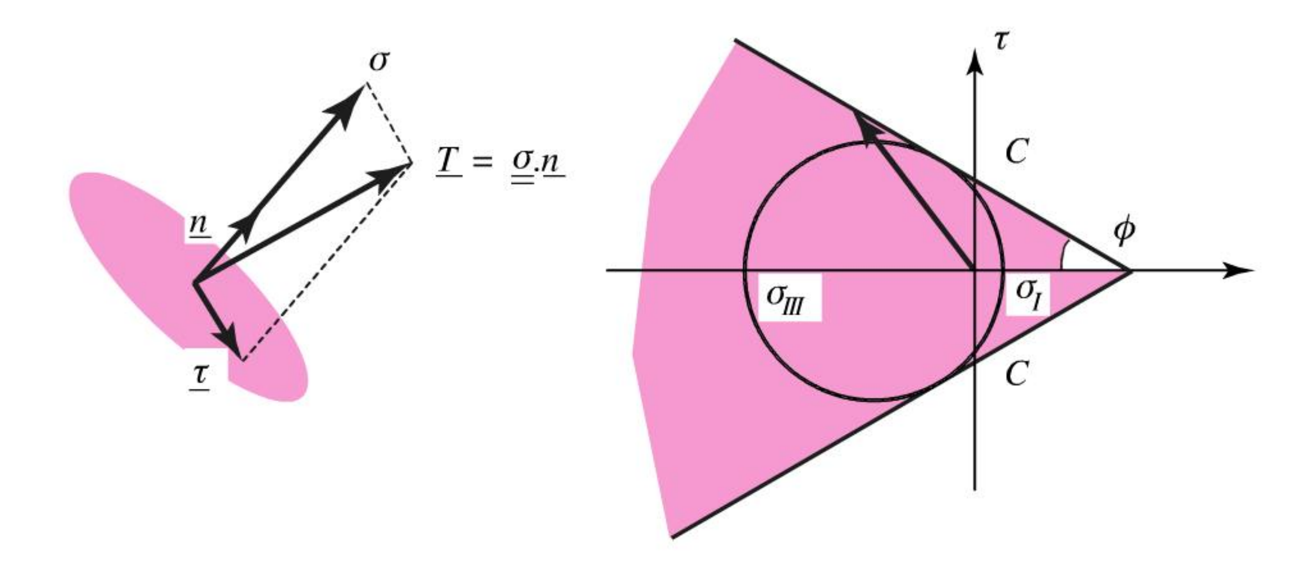


Figure 21.1 Courbe intrinsèque relative au critère de Mohr-Coulomb décrivant les capacités de résistance d'un sol cohérent et frottant.

21.1 Facteur de stabilité et approche statique par l'intérieur

Les données relatives au problème de calcul à la rupture sont identiques à celles décrites dans le cas du sol purement cohérent (géométrie, conditions aux limites, chargement), hormis bien évidemment le critère de résistance du sol constitutif. Il apparaît ainsi que l'on peut toujours définir un facteur de stabilité de l'ouvrage $\gamma H/C$, dont on se propose de déterminer la valeur extrême définie comme suit

$$\frac{\gamma H}{C} \leqslant \left(\frac{\gamma H}{C}\right)^{+}$$
$$\Updownarrow \tag{21.3}$$
$$\begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}}\ S.A.\gamma \\ \forall \underline{x},\ (\sigma_I - \sigma_{III}) + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin\phi - 2C\cos\phi \leqslant 0 \end{cases}$$

On observera que, contrairement au cas du sol purement cohérent, une telle valeur extrême va dépendre de l'angle de frottement interne ϕ.

Un minorant de cette valeur est obtenu en mettant en œuvre l'approche statique par l'intérieur utilisant le champ de contrainte défini par les équations 21.4, 21.5 et 21.6. Le critère de Coulomb 21.2 s'écrit alors comme suit dans les différentes zones :

Zone 1

$$\gamma x_2 + (-\gamma x_2)\ \sin\phi - 2C\ \cos\phi \leqslant 0. \tag{21.4}$$

Zone 2

$$-2\gamma x_2\ \sin\phi - 2C\ \cos\phi \leqslant 0. \tag{21.5}$$

Zone 3

$$\gamma H + \gamma(H - 2x_2)\ \sin\phi - 2C\ \cos\phi \leqslant 0. \tag{21.6}$$

ces trois conditions étant satisfaites si et seulement si

$$\frac{\gamma H}{C} \leqslant \frac{2\ \cos\phi}{1 -\ \sin\phi} = 2\ \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right), \tag{21.7}$$

d'où l'implication

$$\frac{\gamma H}{C} \leqslant 2\ \tan\ (\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}) \rightarrow \frac{\gamma H}{C} \leqslant \left(\frac{\gamma H}{C}\right)^{+}, \tag{21.8}$$

qui aboutit à l'obtention du minorant suivant

$$\left(\frac{\gamma H}{C}\right)^{+} \geqslant 2\ \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right). \tag{21.9}$$

On retrouve bien évidemment la minoration 19.15 dans le cas d'un sol purement cohérent $\phi = 0$.

21

21.2 Obtention d'un majorant par l'approche cinématique par l'extérieur

On se propose d'appliquer l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture en utilisant le même mécanisme de bloc en translation que celui décrit sur la figure 20.1. La puissance des efforts extérieurs étant alors donnée par la même équation 20.13, il reste à examiner ce que devient la puissance résistante maximale. Le calcul de cette dernière passe par l'évaluation de la fonction π associée à une discontinuité de vitesse dans un matériau de Coulomb, et définie par :

$$\begin{aligned}\pi(\underline{n}\,;[\underline{\hat{U}}]) = \sup\{(\underline{\underline{\sigma}}\underline{n}).[\underline{\hat{U}}] \quad ; &\quad (\sigma_I - \sigma_{III}) \\ + &\quad (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin\phi - 2C\cos\phi \leqslant 0\},\end{aligned} \tag{21.10}$$

qui, compte tenu de l'écriture de ce critère donnée par 21.2, peut se mettre sous la forme

$$\pi(\underline{n}\,;[\underline{\hat{U}}]) = \sup\{(\sigma\,.\,\underline{n} + \tau\underline{t}).[\underline{\hat{U}}];\, |\tau| \leqslant C - \sigma\tan\phi\}. \tag{21.11}$$

La figure 21.2 fait apparaître deux situations selon l'inclinaison de la discontinuité de vitesse par rapport à la ligne de discontinuité.

La discontinuité de vitesse vérifie la relation

$$[\underline{\hat{U}}].\underline{n} < |\underline{\hat{U}}| \sin\phi, \tag{21.12}$$

c'est-à-dire que le vecteur discontinuité de vitesse pointe à l'extérieur du cône des normales au domaine de résistance délimité par la courbe intrinsèque (Fig. 21.2a). Dans ce cas le produit scalaire d'un vecteur contrainte quelconque appartenant au domaine de résistance avec une telle discontinuité de vitesse n'est pas borné :

$$\pi(\underline{n}\,;\,[\underline{\hat{U}}]) = +\infty. \tag{21.13}$$

Un tel cas se présente par exemple lorsque la discontinuité de vitesse est *tangentielle.*

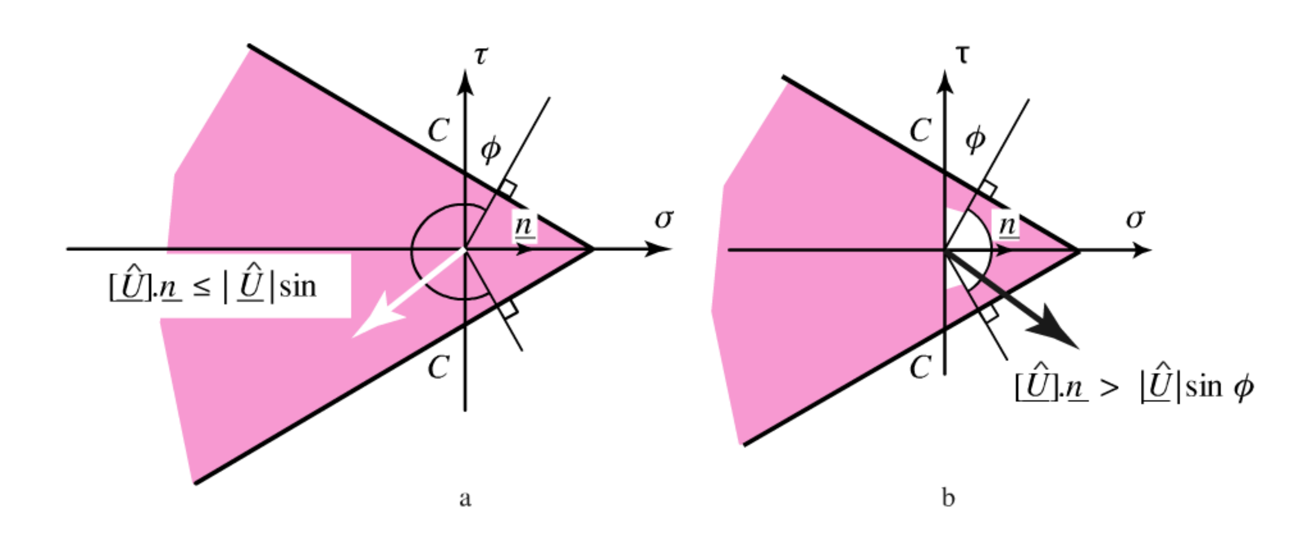


Figure 21.2 Calcul de la fonction π pour un sol frottant (critère de Coulomb).

La discontinuité de vitesse appartient au cône des normales extérieures au domaine de résistance (Fig. 21.2b), soit

$$[\underline{\hat{U}}]\,.\,\underline{n} \geqslant |[\underline{\hat{U}}]|\,\sin\phi. \qquad (21.14)$$

Dans ce cas la fonction π est aisément calculable comme le produit scalaire de la discontinuité de vitesse avec le vecteur contrainte dont l'extrémité coïncide avec la pointe du domaine de résistance

$$\pi(\underline{n}\,;\,[\underline{\hat{U}}]) = C\cot\phi(\underline{n}\,.\,[\underline{\hat{U}}]). \qquad (21.15)$$

Ainsi, pour un sol obéissant à un critère de résistance de Coulomb d'angle de frottement égal à ϕ, les champs de vitesse *pertinents*, pour lesquels il est possible de calculer la puissance résistance maximale, doivent être tels que les discontinuités de vitesse qu'ils comportent « *décollent* » *par rapport à la surface de discontinuité d'un angle au moins égal à* ϕ (Fig. 21.3).

21

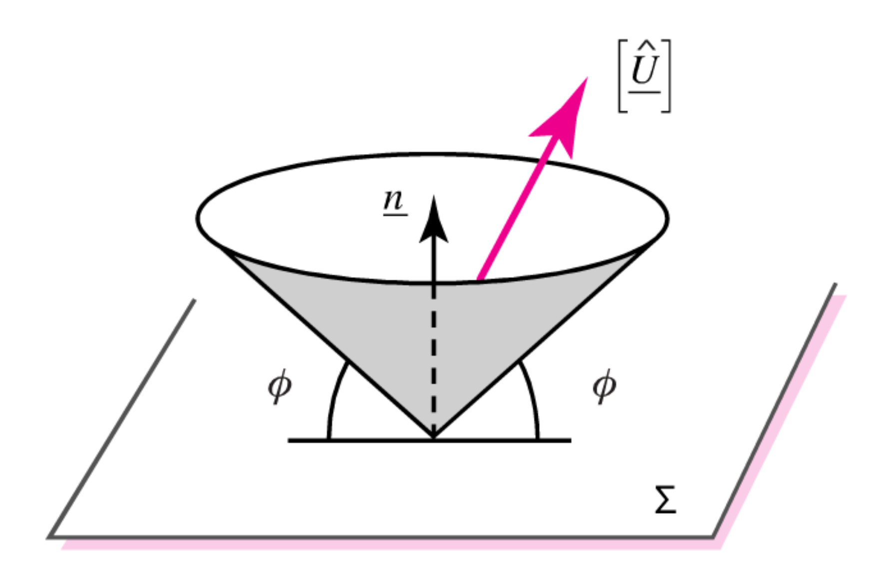


Figure 21.3 Discontinuité de vitesse pertinente pour un sol frottant (critère de Coulomb).

Dans l'exemple du mécanisme de bloc en translation, une telle condition se traduit par

$$\phi \leqslant \beta \leqslant \pi - \phi, \tag{21.16}$$

et le calcul de la puissance résistante maximale donne alors

$$P_{rm}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Sigma} \pi(\underline{n}\,;\ [\hat{\underline{U}}])\, d\Sigma = \frac{H}{\cos\alpha} C \cot\phi [\hat{\underline{U}}] \sin\beta. \tag{21.17}$$

Il vient alors par application de l'approche cinématique

$$\frac{\gamma H}{C} \leqslant \left(\frac{\gamma H}{C}\right)^{+}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} \alpha \in]0, \pi/2[\,;\ \beta \in]\phi\,, \pi - \phi[\,;\ \alpha + \beta < \pi/2 \\ \dfrac{1}{2}\gamma H^2 \left|\hat{\underline{U}}\right| \tan\alpha \cos(\alpha+\beta) \leqslant \dfrac{H}{\cos\alpha} C \cot\phi \left|\hat{\underline{U}}\right| \sin\beta, \end{cases} \tag{21.18}$$

d'où la majoration suivante

$$\begin{cases} \alpha \in]\pi[\,;\ \beta \in]\phi\,,\pi - \phi[\,;\ \alpha + \beta < \pi \\ \left(\dfrac{\gamma H}{C}\right)^{+} \leqslant \dfrac{2\sin\beta}{\tan\beta\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}. \end{cases} \quad (21.19)$$

Un tel majorant prend sa valeur minimale pour $\beta = \phi$ et $\alpha = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\phi}{2}$, soit

$$\left(\frac{\gamma H}{C}\right)^{+} \leqslant 4\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right). \quad (21.20)$$

Le mécanisme optimal correspondant est représenté sur la figure 21.4.

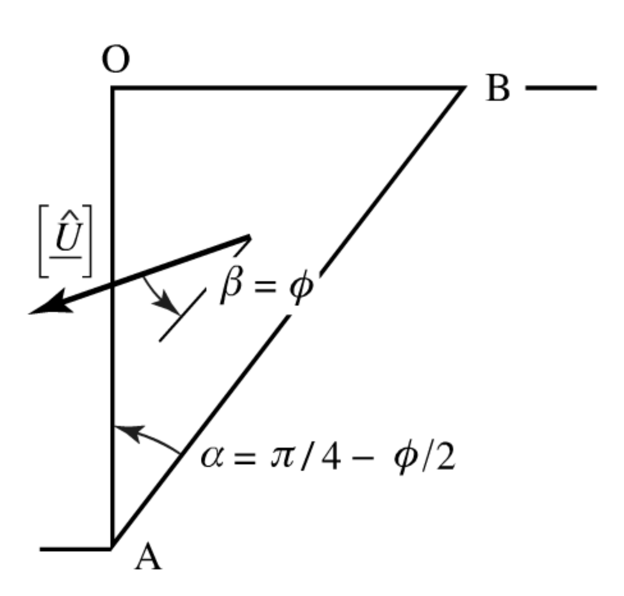


Figure 21.4 Mécanisme de bloc en translation optimal pour le talus en sol de Coulomb.

On retrouve bien évidemment dans le cas du sol purement cohérent la majoration déjà calculée au chapitre 20 (voir équation 20.20).

21.3 Approche cinématique à l'aide de mécanismes par « blocs en rotation »

Un tel mécanisme est représenté sur la figure 21.5. Un bloc OAB est en rotation de vitesse $\hat{\omega}$ autour d'un point quelconque O', la courbe AB délimitant ce bloc du reste du massif constituant une ligne de discontinuité de vitesse. Compte tenu de la condition de pertinence, l'angle β entre la discontinuité de vitesse et la tangente à la courbe doit vérifier la condition 21.16. Il en résulte en particulier que la courbe AB ne peut être un arc de cercle centré en O', comme dans le cas du talus en sol purement cohérent. On peut en revanche montrer qu'à point O' fixé, la courbe AB optimale (c'est-à-dire donnant la valeur minimale du majorant cinématique) est obtenue lorsque $\beta = \phi$, correspondant à un *arc de spirale logarithmique* d'angle ϕ et de foyer O', dont la position est définie par les paramètres angulaires θ_1 et θ_2. Son équation en coordonnées polaires attachées à l'origine O' s'écrit

$$r(\theta) = r(\theta_1)\exp[(\theta - \theta_1)\tan\phi]. \qquad (21.21)$$

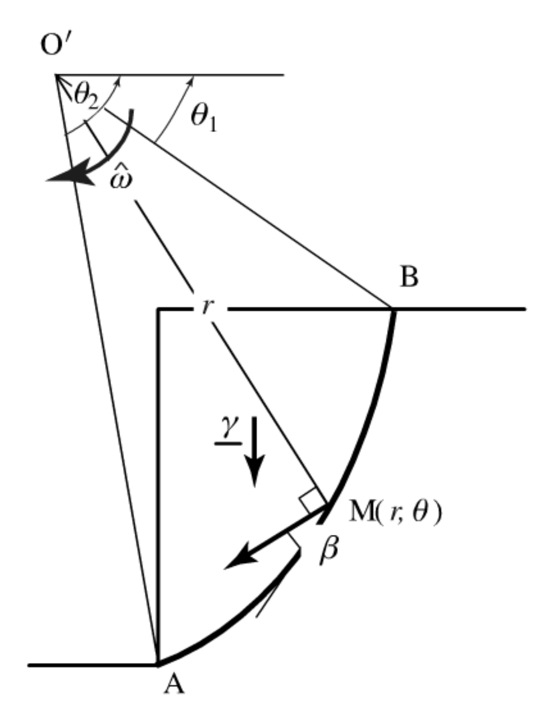


Figure 21.5 Analyse de stabilité par bloc en rotation.

Il en résulte que la puissance des forces de pesanteur dans un tel champ de vitesse peut se mettre sous la forme

$$P_e(\underline{\hat{U}}) = \gamma H^3 \hat{\omega} f(\theta_1,\theta_2), \tag{21.22}$$

où f est une quantité adimensionnelle fonction des seuls paramètres angulaires θ_1 et θ_2, tandis que la « puissance résistante maximale », peut s'écrire

$$P_{rm}(\underline{\hat{U}}) = H^2 \left|\hat{\omega}\right| g(\theta_1,\theta_2). \tag{21.23}$$

L'application de l'approche cinématique par l'extérieur conduit en définitive à l'obtention de la majoration suivante de la valeur extrême du facteur de stabilité

$$\left(\frac{\gamma H}{C}\right)^+ \leqslant \min_{\theta_1,\,\theta_2} \frac{g(\theta_1,\,\theta_2)}{f(\theta_1,\,\theta_2)} \approx 3{,}83 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right). \tag{21.24}$$

Il convient de noter que l'utilisation de « cercles de glissement » faite traditionnellement en mécanique des sols, n'est pas possible pour des sols frottants, puisque elle conduit à l'obtention de majorants infinis pour la valeur extrême du facteur de stabilité de l'ouvrage.



Stabilité des pentes et talus

22 Les approches classiques

Les méthodes usuelles de calcul de stabilité des pentes reposent pour la plupart sur un raisonnement d'« *équilibre limite* », qui consiste à définir une surface de rupture potentielle de l'ouvrage et à comparer :

- la contribution des forces motrices (pesanteur, surcharges, écoulement hydraulique, sollicitation sismique, etc.) qui tendent à déstabiliser la partie de l'ouvrage délimitée par cette surface ;
- à la contribution résistance développée par le sol le long de cette surface, compte tenu de sa résistance caractérisée par sa cohésion et son angle de frottement.

On trouvera, dans Blondeau, 1976 [4], ou Durville et Sève, 1996 [15], une description détaillée de ce type de méthodes appliquées encore aujourd'hui le plus souvent, et que nous nous contentons de décrire brièvement, avant d'en mettre en évidence les limites au regard de la théorie du calcul à la rupture présentée dans la partie G.

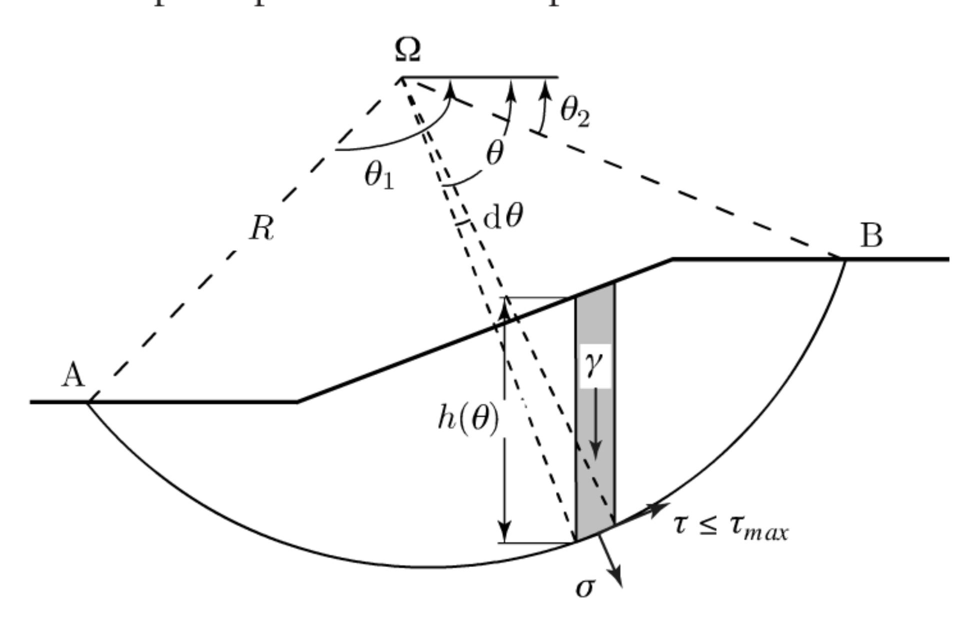


Figure 22.1 Analyse de stabilité d'une pente par « rupture circulaire ».

Lorsque la rupture est « circulaire », c'est-à-dire lorsque l'on considère l'équilibre en moment par rapport au centre Ω d'un volume de sol délimité par une surface circulaire AB de rayon R (Fig. 22.1), le *moment moteur* dû au poids (on suppose qu'il n'a pas d'autre chargement susceptible de déstabiliser l'ouvrage) vaut, en utilisant les notations de la figure :

$$M_w^\Omega = \gamma R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\theta) \sin\theta \cos\theta \, d\theta, \tag{22.1}$$

tandis que le *moment résistant* développé par les contraintes s'exerçant sur la surface de rupture AB s'écrit :

$$M_r^\Omega = R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau(\theta) \, d\theta, \tag{22.2}$$

où $\tau(\theta)$ représente la contrainte de contrainte de cisaillement au point de cette surface repéré par l'angle θ. Deux cas se présentent alors selon que le sol est frottant ou non.

22.1 Cas du sol purement cohérent

Dans le cas où le sol est *purement cohérent*, de cohésion égale à C (exemple de la cohésion non drainée C_u d'une argile saturée), la contrainte de cisaillement le long de la surface de rupture est telle que :

$$|\tau(\theta)| \leqslant C, \tag{22.3}$$

de sorte que le *moment résistant maximal* s'écrit, compte tenu du critère de résistance du sol :

$$M_{rm}^\Omega = C R^2 (\theta_2 - \theta_1). \tag{22.4}$$

Le *coefficient de sécurité* est alors classiquement défini par :

$$F(\theta_1, \theta_2) = \frac{M_{rm}^\Omega}{M_w^\Omega}. \tag{22.5}$$

En se référant au raisonnement du calcul à la rupture introduit dans la partie G, il apparaît alors qu'une *condition nécessaire* pour que la pente soit potentiellement stable est que le coefficient de sécurité défini par 22.5 soit *supérieur à l'unité*, c'est-à-dire en d'autres termes que le moment moteur soit inférieur ou égal au moment résistant maximal développé par les contraintes de cisaillement le long de la surface circulaire :

$$\text{Stabilité potentielle} \Rightarrow F(\theta_1,\theta_2) \geqslant 1. \tag{22.6}$$

Il importe de remarquer que ce raisonnement, qui se réfère à l'approche « *statique par l'extérieur* » (Salençon, 1990 [38] ; de Buhan, 2007 [6]), est rigoureusement équivalente à l'approche cinématique par l'extérieur mise en œuvre au paragraphe 20.3, en utilisant un mécanisme de bloc en rotation représenté sur la figure 20.3. Si on considère en effet un tel mécanisme dans lequel le bloc délimité par l'arc de cercle AB est animé d'un mouvement de rotation de vitesse $\hat{\omega}$ autour du centre Ω il apparaît immédiatement que la « *puissance des efforts extérieurs* » dans ce mécanisme s'écrit tout simplement comme le produit de la vitesse de rotation du bloc par le moment moteur :

$$P_e(\underline{\hat{U}}) = M_w^{\Omega}\hat{\omega}, \tag{22.7}$$

tandis que la *puissance résistante maximale développée* dans ce même mécanisme n'est autre que le produit de cette même vitesse par le moment résistant maximal :

$$P_{rm}(\underline{\hat{U}}) = M_{rm}^{\Omega}\left|\hat{\omega}\right|, \tag{22.8}$$

de sorte que pour $\hat{\omega} > 0$, le coefficient de sécurité n'est autre que le rapport entre la puissance résistante maximale et la puissance des efforts extérieurs :

$$F(\theta_1,\theta_2) = \frac{M_{rm}^{\Omega}}{M_w^{\Omega}} = \frac{P_{rm}(\underline{\hat{U}})}{P_e(\underline{\hat{U}})}. \tag{22.9}$$

Ainsi, dans le cas particulier analysé au chapitre 21 d'un talus vertical et de surfaces de rupture circulaires passant par le pied du talus, le coefficient de sécurité vaut :

22



$$F(\theta_1,\theta_2) = \frac{P_{rm}(\underline{\hat{U}})}{P_e(\underline{\hat{U}})} = \frac{C}{\gamma H} f(\theta_1,\theta_2), \tag{22.10}$$

d'où en minimisant par rapport aux angles θ_1 et θ_2, et en se référant à l'équation 20.27 :

$$\min_{(\theta_1,\theta_2)} F(\theta_1,\theta_2) \approx 3{,}83 \frac{C}{\gamma H} \geqslant \frac{(\gamma H/C)^+}{\gamma H/C}. \tag{22.11}$$

22.2 Cas du sol frottant : la « méthode des tranches »

Dans ce cas, le sol exhibe en plus de sa cohésion un angle de frottement interne ϕ, de sorte que la condition portant sur la contrainte de cisaillement s'écrit (la convention de signe de la MMC (contraintes positives en traction) est ici adoptée) :

$$|\tau(\theta)| \leqslant C - \sigma(\theta) \tan \phi. \tag{22.12}$$

On observe alors que, contrairement à ce qui se passe dans le cas purement cohérent, la *valeur maximale de cette contrainte dépend de la contrainte normale*. L'idée des méthodes classiques d'analyse de stabilité des pentes, et notamment de ce qu'il est convenu d'appeler la « méthode des tranches », consiste à tenter de déterminer la distribution de cette contrainte normale sur la surface de rupture. Le raisonnement consiste à examiner l'équilibre d'une « tranche élémentaire » (d'où l'appellation de la méthode), soumise à l'action de son poids, des contraintes développées par le reste du massif sur la base de la tranche, mais aussi des forces exercées latéralement par les tranches adjacentes. Les seules équations d'équilibre ne pouvant permettre de déterminer un telle distribution de contraintes normales, il convient de recourir à des hypothèses relatives aux forces « inter-tranches ». C'est l'objet des méthodes dites « de Fellenius » ou « de Bishop », décrites en détail dans (Durville et Sève, 1996 [15]). La méthode dite « des perturbations » (Raulin et al., 1974 [33]), constitue une autre variante possible qui repose également sur des

hypothèses relatives à la distribution de contraintes normales le long de la surface de rupture. Ainsi que nous allons le montrer maintenant, il importe de remarquer que toutes ces approches utilisées classiquement aujourd'hui conduisent à des résultats qui, dans le cas d'un sol frottant, ne peuvent être interprétés dans le cadre d'un raisonnement de calcul à la rupture, ni comme des approches par l'intérieur, ni comme des approches par l'extérieur.

23 Analyse par le calcul à la rupture de la stabilité des pentes : l'approche statique par l'extérieur

Reprenons dans le cadre du raisonnement de calcul à la rupture l'analyse de stabilité par surfaces de rupture d'une pente ou d'un talus constitué d'un sol frottant. La figure 23.1 montre l'exemple simplifié (la simplification faite ne nuisant pas à la généralité du propos) d'un talus vertical dont examine l'équilibre d'un bloc OAB délimité par une surface AB de forme quelconque passant par le pied A du talus. Il apparaît qu'une condition nécessaire (mais a priori bien évidemment non suffisante !) de la stabilité potentielle de l'ouvrage est que l'équilibre du bloc OAB en moment par rapport à un point Ω quelconque soit assuré sous l'action de son poids W d'une part, de la distribution de contraintes T d'autre part exercées par le reste du massif sur le bloc le long de la surface de rupture, ces contraintes étant assujetties à respecter le critère de résistance du sol :

$$\underline{T} = \sigma \underline{n} + \underline{\tau}, \quad |\tau| \leqslant C - \sigma \tan \phi. \tag{23.1}$$

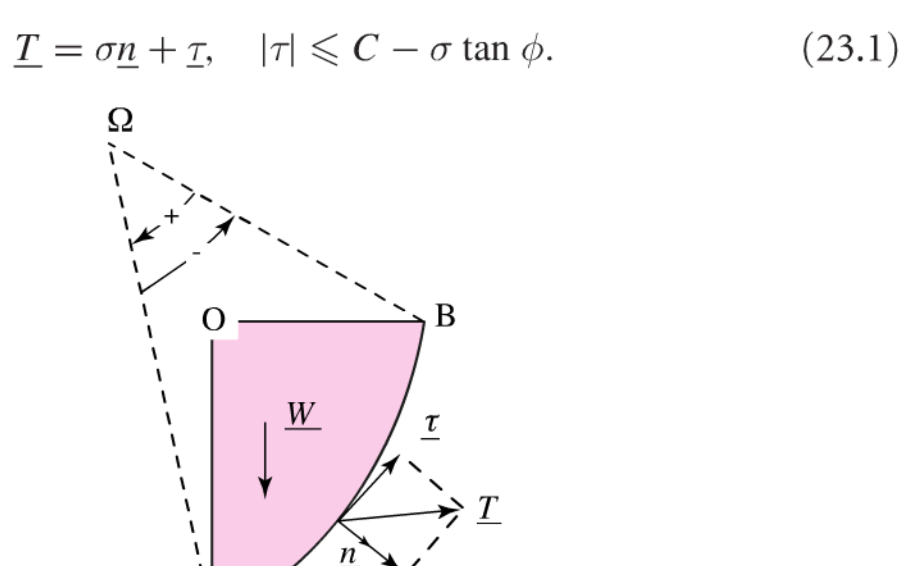


Figure 23.1 Analyse de stabilité d'une talus vertical par une surface de rupture quelconque.

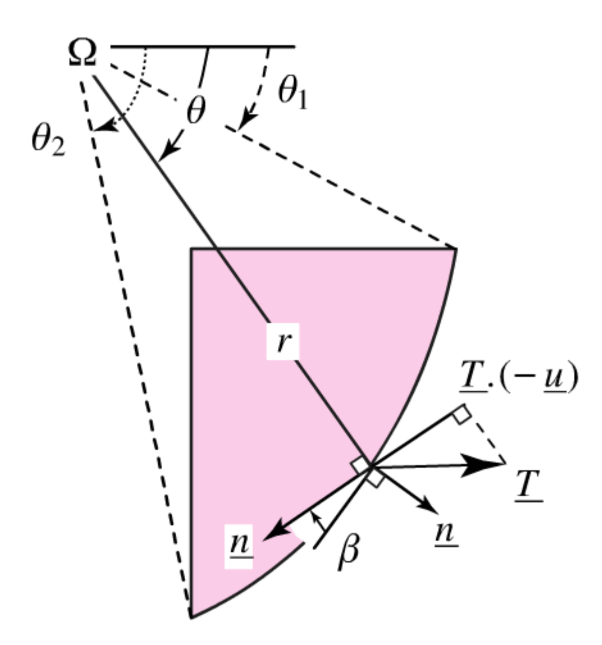


Figure 23.2 Calcul du moment résistant maximal.

On peut donc écrire :

$$\text{Talus potentiellement stable} \Rightarrow \begin{cases} M_w^{\Omega} = M_r^{\Omega}(\underline{T}) \\ |\tau| \leqslant C - \sigma \tan \phi. \end{cases} \qquad (23.2)$$

Il convient alors de rechercher le *moment résistant maximal*, c'est-à-dire la valeur maximale possible du moment résistant développé le long de la surface de rupture, compte tenu de la limitation imposée aux contraintes $\underline{T}$ par le critère de résistance du sol (Éq. 23.1). En adoptant les notations de la figure 23.2, où $\underline{u}$ désigne notamment le vecteur unitaire orthoradial, on peut écrire :

$$M_r^{\Omega} = \int_{AB} r[\underline{T} \,.\, (-\underline{u})]ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r^2}{\cos \beta}[\underline{T} \,.\, (-\underline{u})]d\theta, \qquad (23.3)$$

avec, compte tenu du critère de résistance, la majoration :

$$\underline{T}(-\underline{u}) \leqslant \sup_{\underline{T}=(\sigma,\tau)} \left[\underline{T} \,.\, (-\underline{u}); |\tau| \leqslant C - \sigma \tan \phi\right] = \pi(\underline{u}), \qquad (23.4)$$

et par conséquent :

$$M_r^{\Omega} \leqslant M_{rm}^{\Omega} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r^2}{\cos \beta}\pi(\underline{u})d\theta. \qquad (23.5)$$

Deux cas se présentent alors selon l'orientation du vecteur $\underline{u}$ c'est-à-dire la valeur de l'angle β que fait ce vecteur avec la tangente à la surface de rupture.

1. L'angle β est compris entre ϕ et $\pi - \phi$ (Fig. 23.3(a)). Dans ce cas la valeur de la fonction $\pi(\underline{u})$ est égale à :

$$\pi(\underline{u}) = C \cot \phi \sin \beta. \tag{23.6}$$

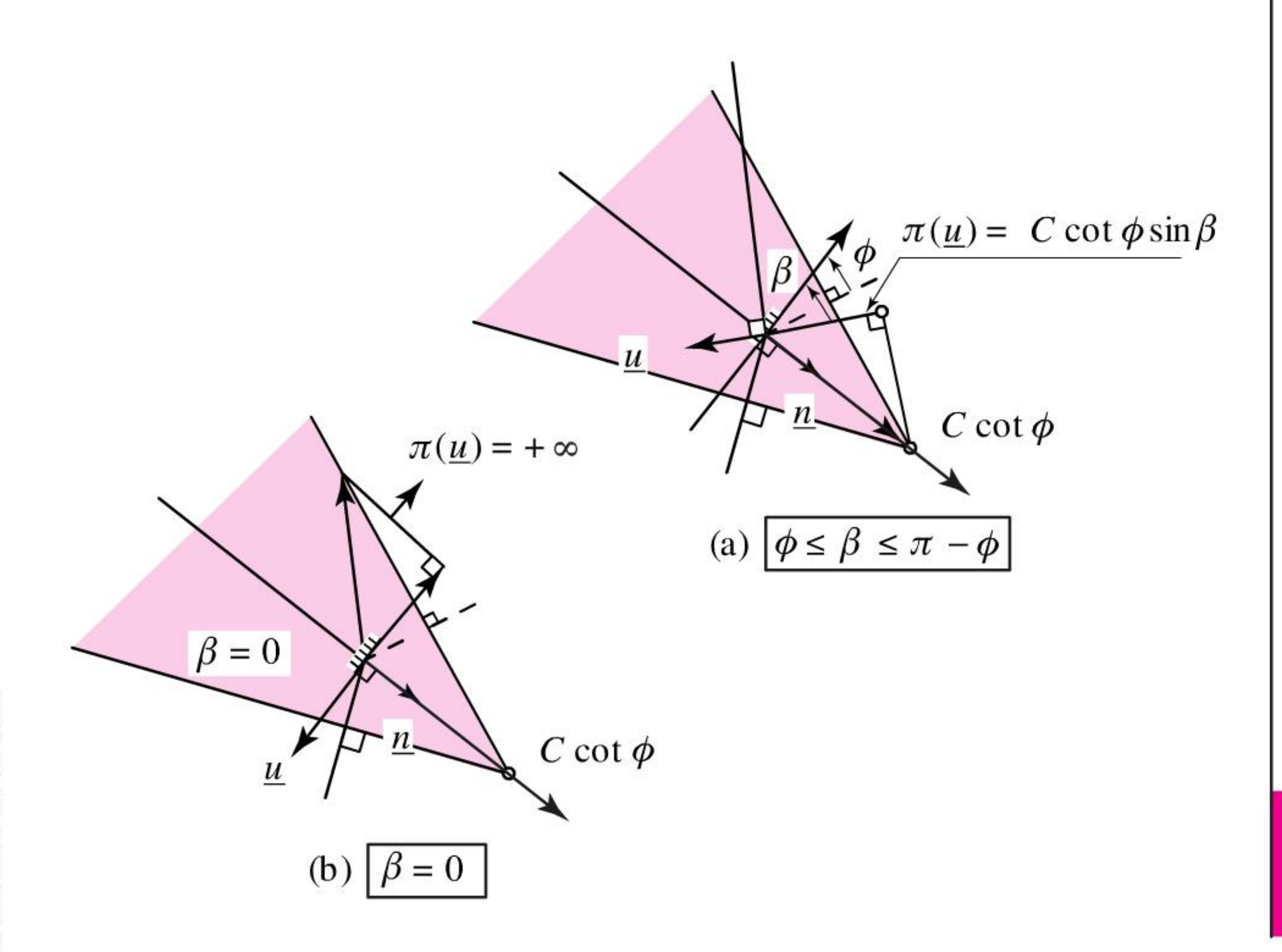


Figure 23.3 Calcul de la fonction π.

2. Dans le cas contraire, tel que celui représenté sur la figure 23.3(b), où par exemple $\beta = 0$ cette même fonction est infinie.

Il en résulte que pour que la valeur du moment résistant maximal soit finie, il faut qu'en tout point de la surface de rupture, la direction ortho-

radiale caractérisée par le vecteur unitaire $\underline{u}$ fasse un angle au moins égal à l'angle de frottement ϕ avec la tangente à cette surface en ce même point. Dans le cas où cet angle est égal à l'angle de frottement, la trace de la surface de rupture est un arc de spirale logarithmique de foyer Ω et d'angle ϕ dont l'équation en coordonnées polaires s'écrit (voir figure 23.3) :

$$\beta(\theta) = \phi \rightarrow r(\theta) = r(\theta_1) \exp[(\theta - \theta_1)] \tan \phi. \tag{23.7}$$

Il vient alors dans ce cas en vertu de 23.5 :

$$\Pi(\underline{u}) = C \cos \phi \rightarrow M_{rm}^{\Omega} = C \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta) d\theta = C H^2 f(\phi,\theta_1,\theta_2), \tag{23.8}$$

où H désigne la hauteur du talus. Le moment moteur dû au poids pouvant par ailleurs se mettre sous la forme :

$$M_w^{\Omega} = \gamma H^3 g(\phi,\theta_1,\theta_2). \tag{23.9}$$

La condition nécessaire de stabilité (23.2) devient :

$$\begin{array}{ll} \text{Talus potentiellement stable} \Rightarrow & M_w^{\Omega} \leqslant M_{rm}^{\Omega} \\ \dfrac{\gamma H}{C} \leqslant \left(\dfrac{\gamma H}{C}\right)^+ & \dfrac{\gamma H}{C} \leqslant \dfrac{g(\phi,\theta_1,\theta_2)}{f(\phi,\theta_1,\theta_2)}, \end{array} \tag{23.10}$$

d'où :

$$\left(\frac{\gamma H}{C}\right)^+ \leqslant \min_{(\theta_1,\theta_2)} \frac{g(\phi,\theta_1,\theta_2)}{f(\phi,\theta_1,\theta_2)} \approx 3{,}83 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right), \tag{23.11}$$

c'est-à-dire la même majoration du facteur de stabilité extrême du talus que celle obtenue au chapitre 21 (paragraphe 21.3) où l'on a mis en œuvre l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture en utilisant des mécanismes par « blocs en rotation » délimités par des arcs de spirale logarithmique. Ce résultat ne doit pas surprendre, puisque l'on observe que dans cette dernière approche, la puissance des forces de pesanteur (Éq. 21.22) et la puissance résistante maximale (Éq. 21.23)

peuvent s'écrire comme le produit par la vitesse de rotation angulaire, respectivement du moment moteur et du moment résistant maximal calculés précédemment :

$$P_e(\underline{\hat{U}}) = M_w^{\Omega}\hat{\omega}, \quad P_{rm}(\underline{\hat{U}}) = M_{rm}^{\Omega}\hat{\omega}. \tag{23.12}$$

Il apparaît ainsi clairement que la mise en œuvre de l'approche cinématique par blocs en rotation n'est que la dualisation par les puissances virtuelles de l'approche statique par l'extérieur développée ci-dessus.

La valeur minimale du *coefficient de sécurité* du talus (parfois également appelé *facteur de confiance*) est alors :

$$F = \min_{(\theta_1,\theta_2)} \left[F(\theta_1,\theta_2) = \frac{M_{rm}^{\Omega}}{M_w^{\Omega}} \right] \approx 3{,}83 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\frac{C}{\gamma H}, \tag{23.13}$$

la stabilité potentielle de l'ouvrage exigeant que ce coefficient soit plus grand que l'unité, avec une marge suffisante pour tenir compte notamment du fait qu'il s'agit d'une approche par l'extérieur. Il est en revanche parfaitement clair que l'obtention d'une valeur du coefficient de sécurité inférieure à l'unité, signifie l'instabilité certaine de l'ouvrage.

24 Mise en œuvre pratique

24.1 Cas d'un sol multi-couches

Dans le cas d'un talus ou d'une pente où des couches de sol de caractéristiques différentes entrent en jeu, l'approche statique par l'extérieur consistant à examiner l'équilibre de blocs en moment, peut être facilement généralisée comme suit. La figure 24.1 donne l'exemple d'un talus en sol bi-couches, dont la couche inférieure est constituée d'un sol purement cohérent, tandis que la couche supérieure est en sol frottant. L'analyse de stabilité de cet ouvrage peut être alors évaluée en considérant l'équilibre en moment par rapport à un point Ω d'un bloc délimité dans la couche inférieure purement cohérente par un *arc de cercle* AB centré en Ω, et se prolongeant dans la couche supérieure en sol frottant par un *arc de spirale logarithmique* BC d'angle égal à l'angle de frottement de la couche de sol traversée, et de foyer Ω, le point de raccord B étant un point anguleux.

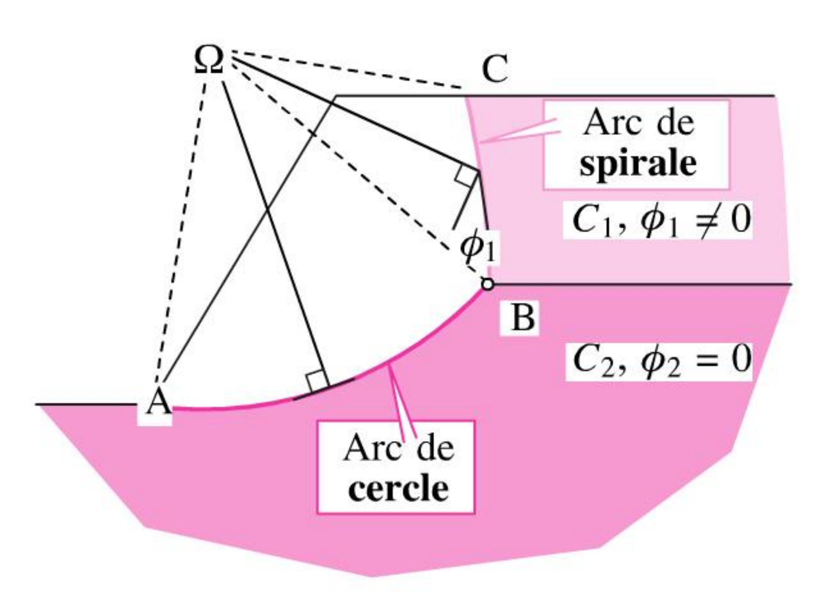


Figure 24.1 Analyse de stabilité d'un talus en sol bicouche.



24.2 Prise en compte de surcharges et d'un écoulement hydraulique

L'analyse de stabilité par équilibre de blocs peut aisément être étendue au cas où, hormis le poids volumique du sol, des surcharges (ponctuelles ou surfaciques, ainsi qu'un écoulement hydraulique dans la partie de l'ouvrage situé sous la nappe, doivent être pris en compte (Fig. 24.2). Pour un bloc donné délimité par une surface AB et un point Ω fixé, la coefficient de sécurité de la pente ou du talus se calcule comme suit :

$$F(AB;\ \Omega) = \frac{M_{rm}^{\Omega}}{M_w^{\Omega} + M_q^{\Omega} + M_u^{\Omega}}, \qquad (24.1)$$

où M_q^{Ω} et M_u^{Ω} désignent respectivement le moment de la partie des surcharges q qui agissent sur le bloc et le moment de la distribution de pression interstitielle u qui s'applique sur le contour de ce bloc, y compris le long de la surface de rupture dans la partie située sous la nappe. Cette dernière distribution, qui est une donnée du calcul de stabilité (au même titre que les surcharges), est déterminée par un calcul hydraulique préalable.

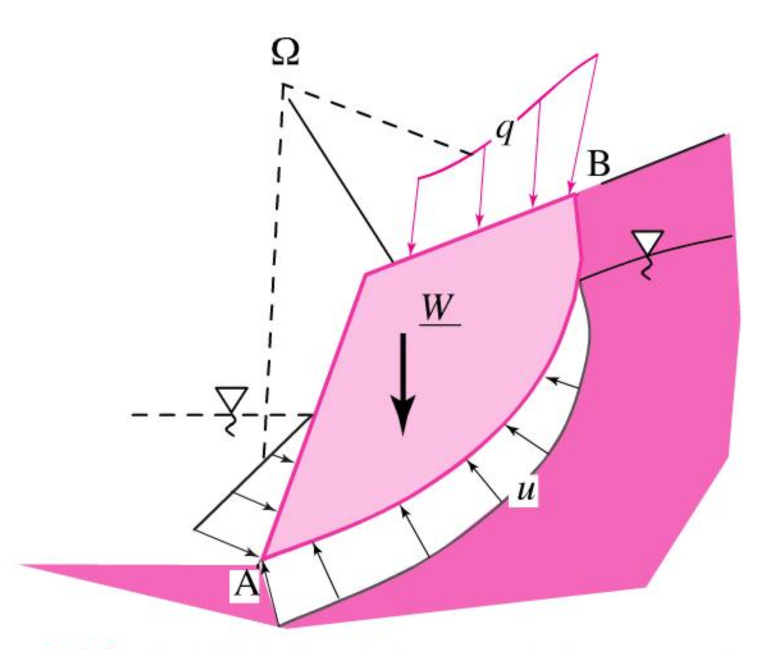


Figure 24.2 Stabilité d'un talus soumis à une surcharge et à un écoulement hydraulique.

24.3 Introduction de renforcements

L'incorporation dans le sol d'éléments de renforcements linéaires (armatures, clous métalliques...) ou bidimensionnels (nappes géotextiles, géogrilles...) destinés à assurer ou à améliorer la stabilité d'ouvrages, se fait tout naturellement dans le cadre de l'approche calcul à la rupture. Tous comme les sols constitutifs, ces renforcements sont considérés comme des éléments *résistants* (le statut de ces renforcements est ambigu dans le cadre des méthodes classiques de stabilité) caractérisés par un critère de résistance. Dans le cadre d'une modélisation simplifiée (mais tout à fait suffisante dans la grande majorité des cas) de ces renforcements, l'effort prédominant est l'effort axial, noté N, pour lequel la condition de résistance s'écrit très simplement :

$$0 \leqslant N \leqslant R_t, \tag{24.2}$$

où R_t représente la *résistance en traction du renforcement*, supposée par exemple linéaire, que l'on peut par exemple évaluer comme le produit de la résistance en traction simple du matériau constitutif par la section nette de l'inclusion. La condition 24.2 signifie en outre qu'en raison du phénomène de flambement, la résistance en compression des ces renforcements est considérée comme étant nulle. Dans ces conditions, le moment résistant est égal à la somme des contributions relatives au sol d'une part le long de la surface de rupture, à l'inclusion de renforcement d'autre part au droit de son point d'intersection avec cette surface de rupture (Fig. 24.3) :

$$M_r^{\Omega} = M^{\Omega}(\underline{T}) + M^{\Omega}(N) \quad \text{avec} \quad M^{\Omega}(N) = rN \sin(\theta - \delta). \tag{24.3}$$

Compte tenu de la condition de résistance 24.2, la contribution au moment résistant maximal due au renforcement est :

$$\begin{aligned} M_{rm}^{\Omega}(\text{renf}) &= \max\left[rN \sin(\theta - \delta)\,;\ 0 \leqslant N \leqslant R_t\right] \\ &= \begin{cases} rR_t \sin(\theta - \delta) & \text{si}\ \theta \geqslant \delta \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned} \tag{24.4}$$

qui est toujours une quantité positive (ou nulle) venant se rajouter au moment résistant maximal développé par le sol le long de la surface de

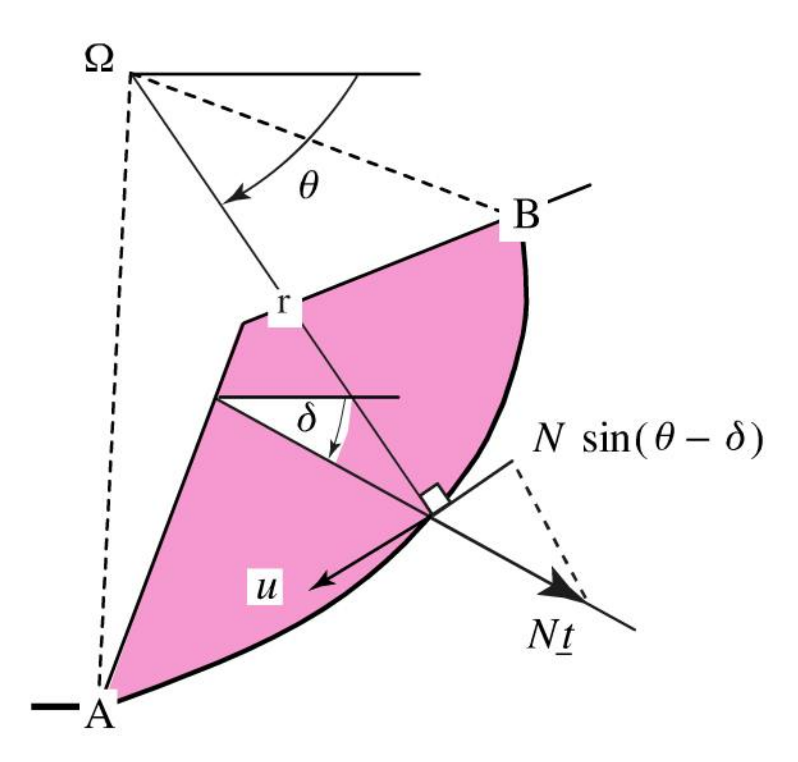


Figure 24.3 Stabilité d'une pente renforcée.

rupture. Il en résulte que le coefficient de sécurité de l'ouvrage renforcé (F) (relatif à l'équilibre de bloc considéré) est bien supérieur à celui de l'ouvrage non renforcé (F_0) :

$$F(AB;\ \Omega) = \frac{M_{rm}^{\Omega}(\text{sol}) + M_{rm}^{\Omega}(\text{sol})}{M_{w}^{\Omega}} \geqslant \frac{M_{rm}^{\Omega}(\text{sol})}{M_{w}^{\Omega}} = F_0(AB;\ \Omega). \quad (24.5)$$

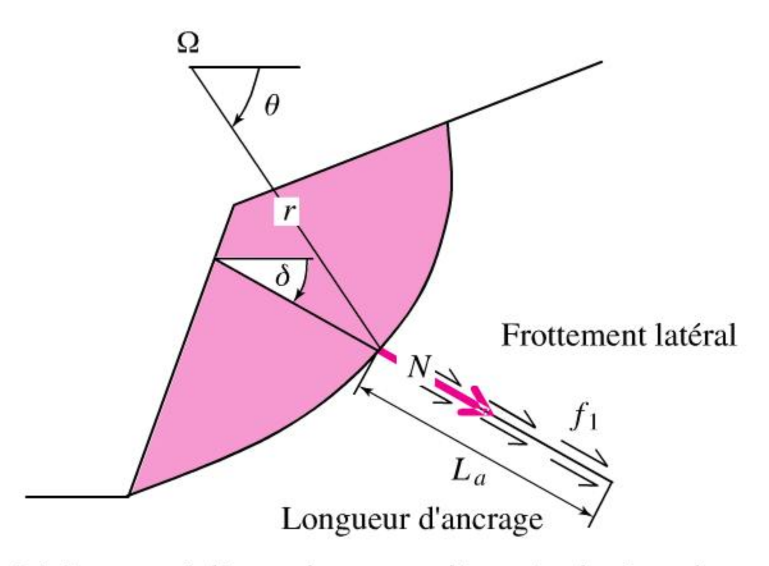


Figure 24.4 Résistance à l'arrachement d'une inclusion de renforcement.

Il convient dans ce type d'analyse de prendre en compte la rupture possible par « arrachement » de l'inclusion de renforcement par rapport au sol, du à un défaut d'adhérence. Désignant par f_l la résistance à l'arrachement par unité de longueur de l'inclusion, qu'il est possible d'évaluer par un essai *in situ*, et par L_a la « longueur d'ancrage », c'est-à-dire la longueur d'inclusion située au-delà de la surface de rupture (Fig. 24.4), la résistance du renforcement à prendre en compte dans l'analyse de stabilité, notée N_0, est égale à :

$$N_0 = \min(R_t;\ f_l\, L_a). \qquad (24.6)$$

25 En conclusion

L'analyse par le *calcul à la rupture* de la stabilité des pentes et talus présente de nombreux avantages par rapport aux méthodes classiques, encore le plus couramment utilisées aujourd'hui. Il s'agit en premier lieu d'une approche rigoureuse fondée sur le seul raisonnement de *compatibilité équilibre-résistance*, ne nécessitant aucune hypothèse particulière, contrairement par exemple à la méthode des tranches évoquée précédemment. Les résultats auxquels elle conduit donnent lieu à une interprétation claire. Il s'agit en effet, pour ce qui concerne par exemple l'étude de stabilité par blocs décrite ci-dessus, d'une approche par l'extérieur conduisant à l'obtention de *majorants* du coefficient de sécurité de l'ouvrage.

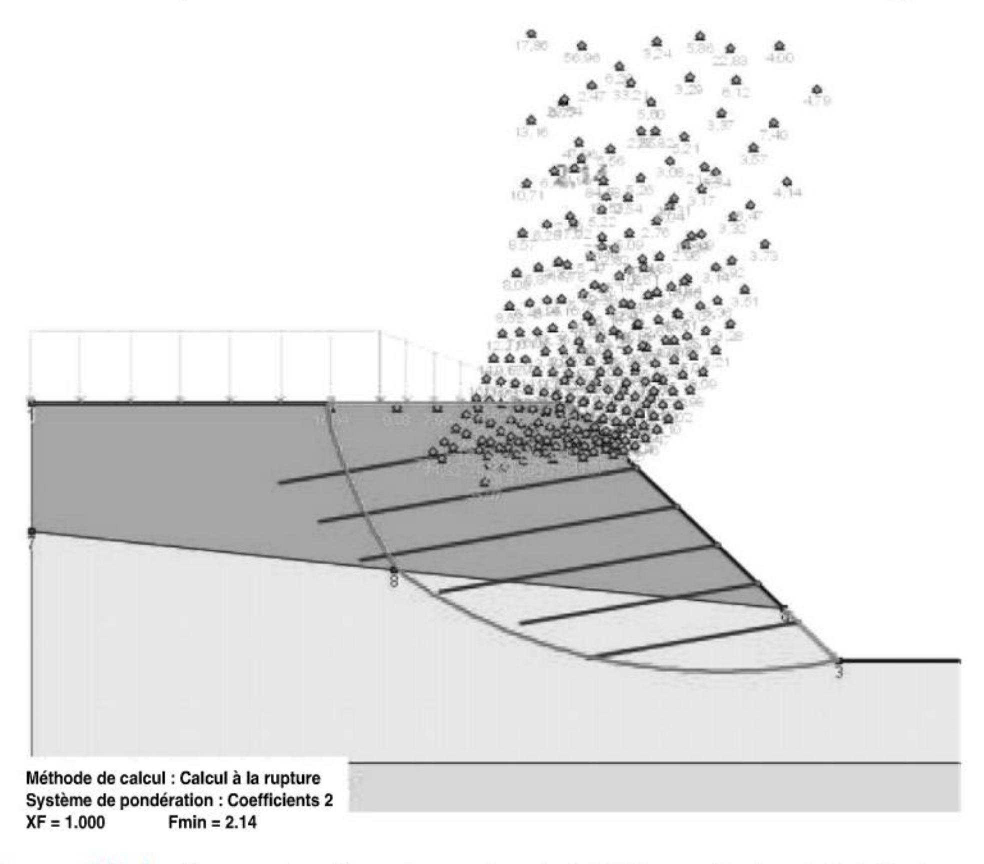


Figure 25.1 Exemple d'analyse de stabilité par le logiciel Talren 4 (calcul à la rupture : approche par l'extérieur) d'une pente renforcée par clouage.



La méthode du calcul à la rupture est en outre extrêmement souple d'utilisation, car applicable à toutes les situations et à tous types d'ouvrages, y compris dans les situations les plus complexes où les approches traditionnelles se révèlent parfois inopérantes. Présentant un caractère systématique, elle a donné lieu à l'élaboration et à la mise au point d'un logiciel de calcul fonctionnant sur microordinateur (logiciel STARS : Anthoine, 1990 [1] ; de Buhan et al., 1993 [7]). Tout récemment encore, elle a été intégrée, comme méthode de calcul alternative aux méthodes traditionnelles, dans le logiciel Talren 4 (Simon, 2006 [43]). La figure 25.1 ci-dessus donne l'exemple d'un calcul de stabilité effectué par ce dernier logiciel sur un ouvrage de soutènement renforcé par clouage.

Il convient enfin de noter que l'approche calcul à la rupture ici développée est parfaitement en accord avec la problématique de la sécurité relative aux États Limites Ultimes (ELU). Des coefficients *partiels* de sécurité sont ainsi affectés aux paramètres définissant le problème de stabilité de l'ouvrage. Ces coefficients viennent réduire la valeur caractéristique des paramètres de résistance ainsi que celles des charges lorsque ces dernières sont stabilisatrices dans l'équilibre de bloc considéré, tandis qu'il viennent augmenter la valeur des charges stabilisatrices.

I

Capacité portante des fondations superficielles

26 Introduction

Une fondation est par définition superficielle lorsque elle repose sur un massif de sol, à surface généralement proche de l'horizontale, ou n'y est que faiblement encastrée. Destinée à transmettre au massif de sol sous-jacent les charges dues au poids des constructions (bâtiments, ouvrages d'art...), ce type de fondation peut être subdivisée en plusieurs catégories : les semelles filantes, les semelles isolées et les radiers ou dallages (Fig. 26.1).

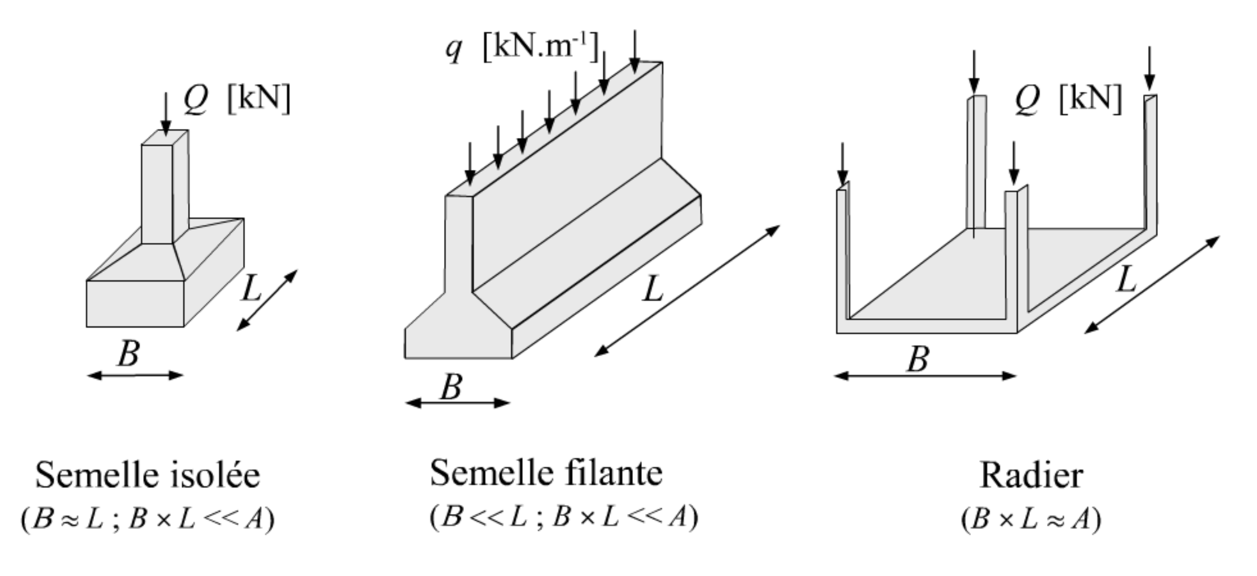


Figure 26.1 Types de fondations superficielles (avec A aire portée de l'ouvrage).

La figure 26.2 représente une courbe typique donnant le tassement s de la fondation en fonction de la charge Q qui lui est appliquée. La valeur limite Q_l correspond à la *capacité portante ultime* de la fondation, qui provoque le poinçonnement du sol. L'évaluation de cette capacité portante relève très précisément d'un *raisonnement de calcul à la rupture*, tel que nous en avons exposé les principes dans la partie G. L'objet du présent chapitre est d'illustrer l'application d'un tel raisonnement sur l'exemple simple du calcul de la capacité portante d'un massif semi infini en sol purement cohérent, traité comme un problème en déformation plane.

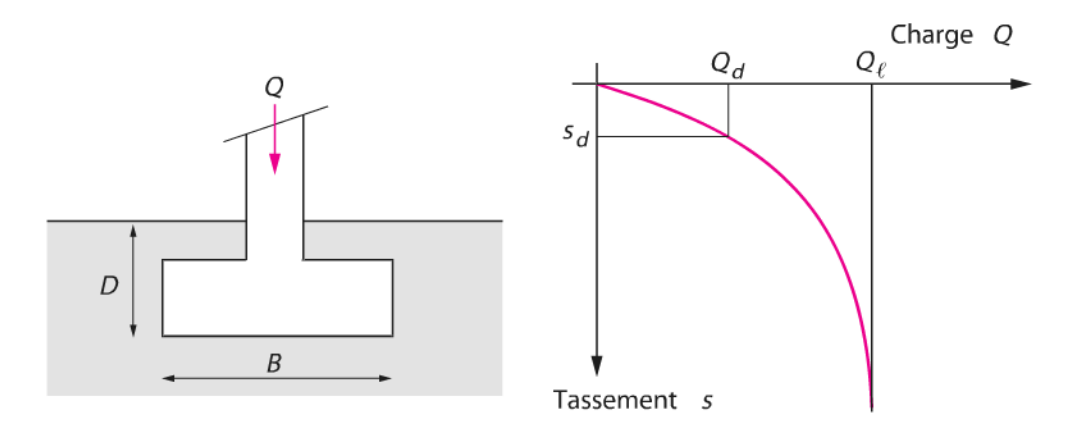


Figure 26.2 Courbe donnant le tassement d'une fondation superficielle en fonction de la charge appliquée (d'après Frank [17]).

27 Un exemple : l'analyse de la capacité portante d'un massif en sol purement cohérent

On considère un massif de sol semi infini soumis à une pression uniforme d'intensité p, comptée positivement vers le bas, s'exerçant sur une bande de largeur B et d'extension infinie dans la direction Oz (Fig. 27.1). On néglige dans un premier temps le poids propre du sol ($\gamma = 0$). Le critère de résistance utilisé est celui de Tresca, de *cohésion* C. On recherche la valeur du chargement extrême p^+ (*capacité portante* du massif), définie en vertu du raisonnement du calcul à la rupture par :

$$0 \leqslant p \leqslant p^+ \Leftrightarrow \left\{ \exists\, \underline{\underline{\sigma}}\ S.A. \text{ avec } p \text{ tel que } \forall \underline{x}\ ;\ f(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) \leqslant 0 \right\}. \quad (27.1)$$

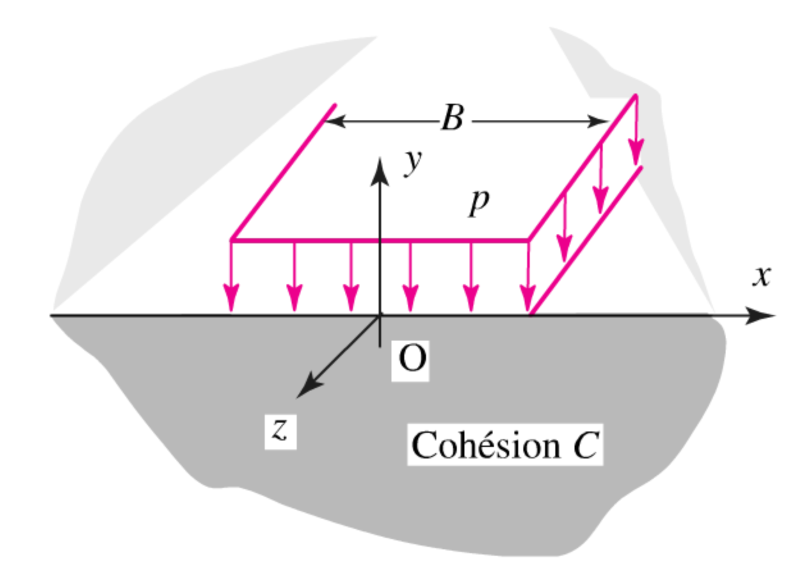


Figure 27.1 Problème de la capacité portante d'un massif en sol purement cohérent.

Dans cette équation $\underline{\underline{\sigma}}$ S.A. avec p signifie que les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ (ou $[\underline{\underline{\sigma}}]\,.\,\underline{n} = \underline{0}$ à la traversée d'éventuelles surfaces de discontinuité du champ de contrainte) ;
- $$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(|x| > B/2, z = 0)\,.\,\underline{e}_z = \underline{0} \\ \underline{\underline{\sigma}}(|x| \leqslant B/2, z = 0)\,.\,\underline{e}_z = -p\underline{e}_z. \end{cases} \qquad (27.2)$$

27.1 Approches statiques par l'intérieur

27.1.1 Champs de contrainte à trois zones

Ce champ, représenté sur la figure 27.2, est défini comme suit :

• zones (2) et (2') :

$$|x| > B/2, \underline{\underline{\sigma}} = -q\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - r\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z; \qquad (27.3)$$

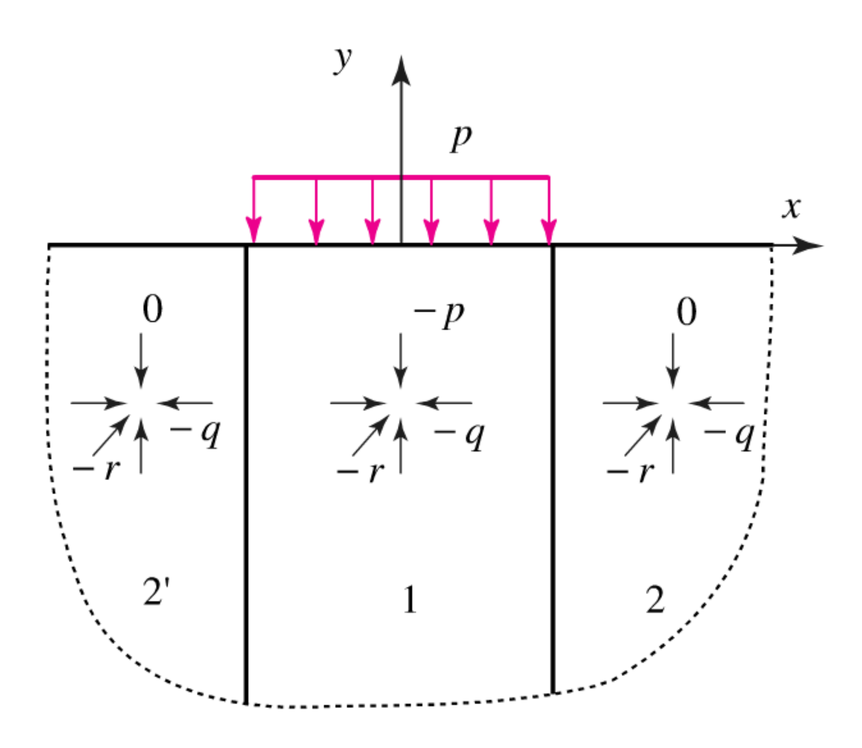


Figure 27.2 Approche statique par l'intérieur à l'aide d'un champ à trois zones.

• zone (1) :

$$|x| \leqslant B/2, \underline{\underline{\sigma}} = -q\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - p\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - r\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z. \qquad (27.4)$$

Les quantités q et r sont des constantes. Ce champ est manifestement statiquement admissible avec la valeur p du chargement appliqué en surface, puisqu'il vérifie de manière évidente l'équation d'équilibre dans chaque zone, les conditions aux limites en surface, et la condition de continuité du vecteur contrainte au passage d'une zone à l'autre.

En choisissant alors la contrainte $\sigma_{zz} = -r$ comme contrainte principale intermédiaire dans chaque zone, l'écriture de la condition de résistance de Tresca donne :

$$|q|\,, |p-q| \leqslant 2C, \qquad (27.5)$$

d'où

$$\sup\{p\,;\ |q| \leqslant 2C, |p-q| \leqslant 2C\} = 4\,C. \qquad (27.6)$$

Il en découle que, jusqu'à la valeur $p = 4C$, il est possible de construire un champ de contrainte en équilibre avec ce chargement et respectant en tout point du massif le critère de résistance. D'où l'obtention d'un premier *minorant* de la capacité portante :

$$p^+ \geqslant 4\,C. \qquad (27.7)$$

27.1.2 Champs de contrainte à six zones

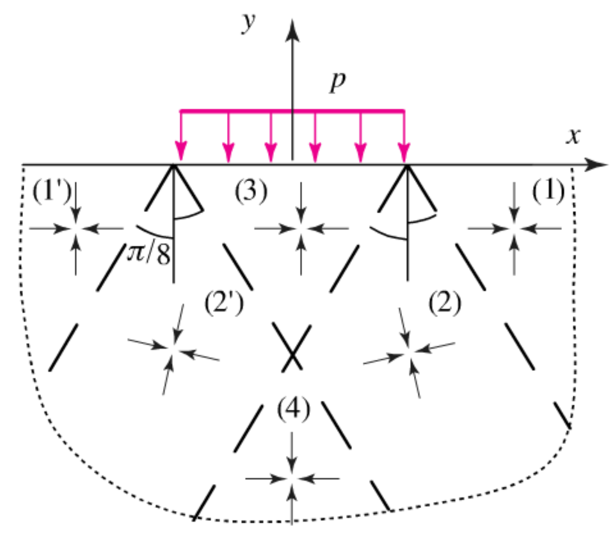


Figure 27.3 Approche statique par l'intérieur à l'aide d'un champ à six zones.

Ce champ comporte six zones à l'intérieur desquelles la contrainte, constante, sature le critère de résistance de Tresca (Fig. 27.3). L'utilisation des cercles de Mohr (Fig. 27.4) permet de construire un tel champ de proche en proche en partant de la zone (1) pour aller vers la zone (3) en passant par la zone (2) en s'assurant de la continuité du vecteur contrainte au franchissement des lignes de séparation.

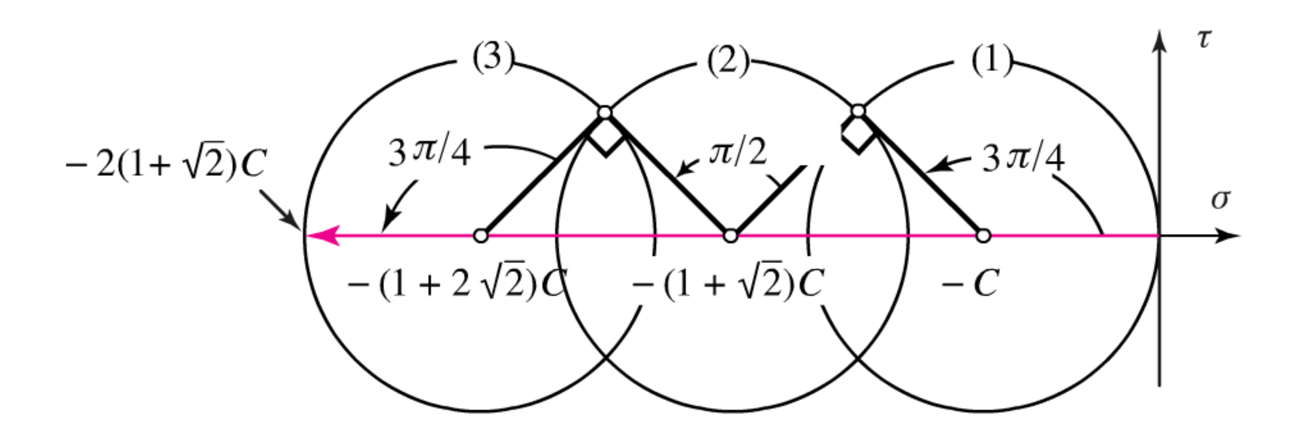


Figure 27.4 Cercles de Mohr relatifs aux différents états de contrainte dans le champ à six zones.

On observe alors immédiatement qu'un tel champ est en équilibre avec la valeur $p = 2(1+\sqrt{2})C$ du chargement, d'où l'amélioration du minorant de la capacité portante :

$$p^+ \geqslant 2(1+\sqrt{2})C \approx 2{,}828\,C. \tag{27.8}$$

27.2 Approches cinématiques par l'extérieur

27.2.1 Mécanisme à cinq blocs

Ce mécanisme, représenté sur la figure 27.5, est constitué de cinq blocs en translation, numérotés de 1 à 5, ayant la forme de triangles isocèles de demi-angle au sommet α. Compte tenu de la *condition de pertinence* relative au critère de Tresca, les discontinuités de vitesse entre ces blocs doi-

vent être *tangentielles*. Si U est la vitesse verticale du bloc n° 1 situé sous la zone d'application du chargement, l'*hodographe des vitesses* (Fig. 27.6) permet de calculer les vitesses des autres blocs, ainsi que la valeur des différentes discontinuités de vitesse en fonction de U et α.

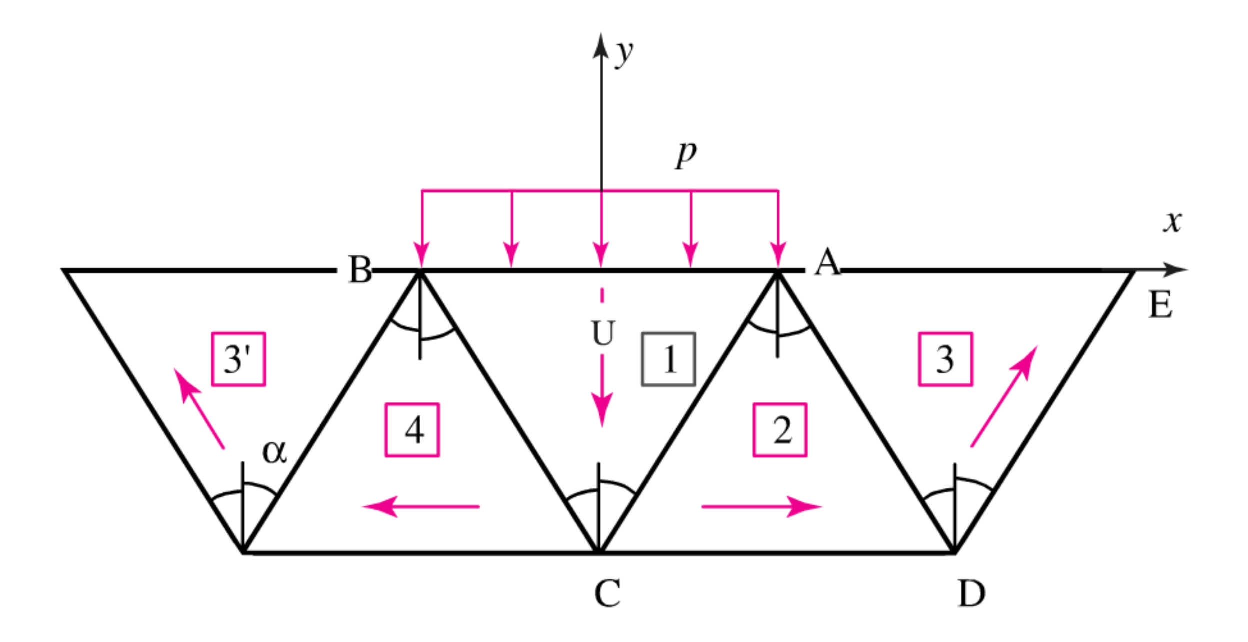


Figure 27.5 Mécanisme de ruine par blocs en translation.

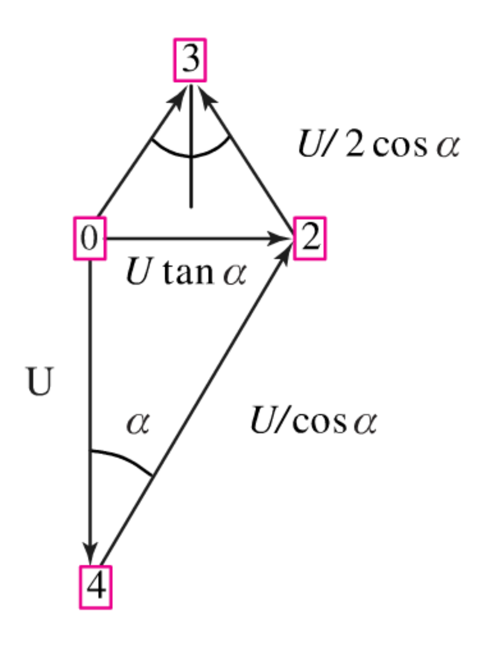


Figure 27.6 Hodographe des vitesses.

27

Dans un tel mécanisme, la *puissance résistante maximale*, qui se réduit à la contribution des discontinuités entre les blocs, s'écrit :

$$P_{rm}(\hat{\underline{U}}) = 2(AC\,.\,C\,|U/\cos\alpha| + CD\,.\,C\,|U\tan\alpha| + AD\,.\,C\,|U/2\cos\alpha| + DE\,.\,C\,|U/2\cos\alpha|), \quad (27.9)$$

soit encore pour $U > 0$:

$$P_{rm}(\hat{\underline{U}}) = 2B\,.\,C\,.\,U\left[\tan\alpha + \frac{2}{\sin\ 2\alpha}\right] = 2B\,.\,C\,.\,U(2t + 1/t), \quad (27.10)$$

où l'on a posé $t = \tan\alpha$. La puissance virtuelle des efforts extérieurs dans ce même mécanisme étant égale à :

$$P_e(\hat{\underline{U}}) = pB\,.\,U, \quad (27.11)$$

on en déduit la majoration suivante de la capacité portante :

$$p^+ \leqslant 2C(2t + 1/t). \quad (27.12)$$

le meilleur majorant, obtenu pour $t = \tan\alpha = \sqrt{2}/2$, est :

$$p^+ \leqslant 4\sqrt{2}C = 5{,}66\,C. \quad (27.13)$$

27.2.2 Le mécanisme de Prandtl

Ce mécanisme (Fig. 27.7) est formé d'un bloc rectangle isocèle ABC animé d'une vitesse verticale descendante U, ainsi que deux blocs adjacents ADE et BFG en translation, raccordés au bloc central par deux éventails circulaires BFC et ACD qui sont le siège d'une déformation de cisaillement, où le champ des vitesses est défini en coordonnées polaires (r,θ) attachées au sommet de l'éventail par $\hat{\underline{U}} = (U/\sqrt{2})\underline{e}_\theta$.

L'hodographe des vitesses correspondant est représenté sur la figure 27.8. Il permet de calculer les différentes discontinuités de vitesse en fonction de la vitesse U du bloc central 1.

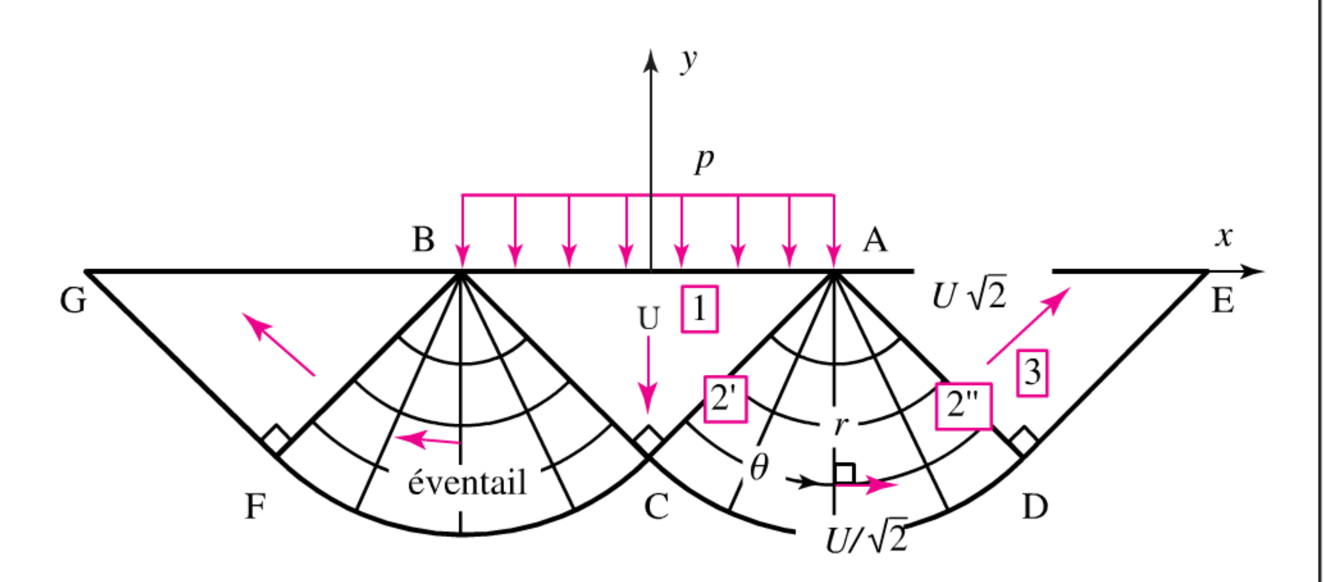


Figure 27.7 Mécanisme de Prandtl.

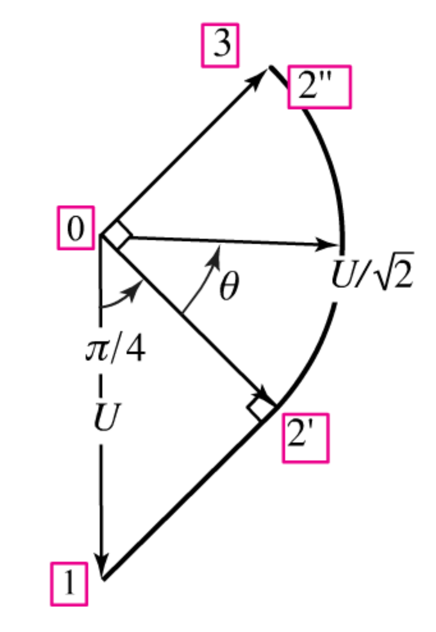


Figure 27.8 Hodographe des vitesses.

• Le long des quarts de cercle CD et CF, la discontinuité est *tangentielle* de module $U/\sqrt{2}$. La contribution correspondante à la puissance résistante maximale est :

$$P_{rm}^{CD \cup FG}(\underline{\hat{U}}) = 2\left(\frac{\pi}{2}\frac{B}{\sqrt{2}}\right) C \frac{U}{\sqrt{2}} = \frac{\pi BCU}{2}. \qquad (27.14)$$

• Le long des segments AC et BC, cette discontinuité est également tangentielle de module $U/\sqrt{2}$. D'où la contribution correspondante à la puissance résistante maximale :

$$P_{rm}^{BC\cup AC}(\underline{\hat{U}}) = 2\left(\frac{B}{\sqrt{2}}\right) C\,\frac{U}{\sqrt{2}} = BCU. \tag{27.15}$$

• Enfin, le long des segments DE et FG, la discontinuité tangentielle est de module $U/\sqrt{2}$, et la contribution à la puissance résistante maximale vaut donc :

$$P_{rm}^{DE\cup FG}(\underline{\hat{U}}) = 2\left(\frac{B}{\sqrt{2}}\right) C\,\frac{U}{\sqrt{2}} = BCU. \tag{27.16}$$

Dans chaque éventail, le taux de déformation s'écrit :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{\hat{U}}) = -\frac{U}{2\sqrt{2}r}(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta,\otimes \underline{e}_r) \tag{27.17}$$

de sorte que les *valeurs principales* sont :

$$\hat{d}_1 = \frac{U}{2\sqrt{2}r} \geqslant \hat{d}_2 = 0 \geqslant -\frac{U}{2\sqrt{2}r}. \tag{27.18}$$

Donc

$$\pi(\underline{\underline{\hat{d}}}) = C(\left|\hat{d}_1\right| + \left|\hat{d}_2\right| + \left|\hat{d}_3\right|) = \frac{CU}{r\sqrt{2}}, \tag{27.19}$$

et la contribution de ces deux éventails à la puissance résistante maximale est :

$$P_{rm}^{ACD\cup BCF}(\underline{\hat{U}}) = 2\int_{r=0}^{B/\sqrt{2}}\left(\int_{\theta=0}^{\pi/2}\frac{CU}{r\sqrt{2}}r\,d\theta\right) = \frac{\pi B\,C\,U}{2}. \tag{27.20}$$

La puissance résistante maximale totale développée dans le mécanisme s'écrit donc en définitive :

$$P_{rm}(\underline{\hat{U}}) = (\pi + 2)B\,C\,U, \tag{27.21}$$

d'où, par comparaison avec la puissance des efforts extérieurs $P_e(\underline{\hat{U}}) = pB\,U$, l'obtention du majorant suivant de la capacité portante :

$$p^+ \leqslant (\pi + 2)C \approx 5{,}14C. \tag{27.22}$$

On peut montrer grâce à l'approche statique qu'il s'agit en fait de la valeur exacte :

$$p^+ = (\pi + 2)C \approx 5{,}14\,C. \tag{27.23}$$

27.3 Prise en compte de la pesanteur

En désignant par (P^0) le problème de la capacité portante du massif en l'absence de pesanteur, que nous venons de traiter, on s'intéresse au problème (P^γ) qui diffère du premier par la prise en compte de la pesanteur (Fig. 27.9). La seule application de la définition des capacités portantes correspondantes, désignées respectivement par $p^+(0)$ et $p^+(\gamma)$, nous permet de montrer que ces dernières sont égales, et que donc la pesanteur n'a aucune influence. En effet, on a :

$$\begin{array}{c} p \leqslant p^+(0) \\ \Updownarrow \\ \exists \underline{\underline{\sigma}}^0 \text{ tel que} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^0 = \underline{0} & \left[\underline{\underline{\sigma}}^0\right] . \underline{n} = \underline{0} \\ \underline{\underline{\sigma}}^0(y=0) . e_y = & \left\{ \begin{array}{ll} \underline{0} & \text{si } |x| > B/2 \\ -p\underline{e}_y & \text{si } |x| < B/2 \end{array} \right. \\ \sigma_1^0 - \sigma_3^0 \leqslant 2C, & \end{array} \right. \tag{27.24}$$

ainsi que

$$\begin{array}{c} p \leqslant p^+(\gamma) \\ \Updownarrow \\ \exists \underline{\underline{\sigma}}^\gamma \text{ tel que} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^\gamma - \gamma \underline{e}_y = \underline{0} & \left[\underline{\underline{\sigma}}^\gamma\right] . \underline{n} = \underline{0} \\ \underline{\underline{\sigma}}^\gamma(y=0) . e_y = & \left\{ \begin{array}{ll} \underline{0} & \text{si } |x| > B/2 \\ -p\underline{e}_y & \text{si } |x| < B/2 \end{array} \right. \\ \sigma_1^\gamma - \sigma_3^\gamma \leqslant 2C & \end{array} \right. \tag{27.25}$$

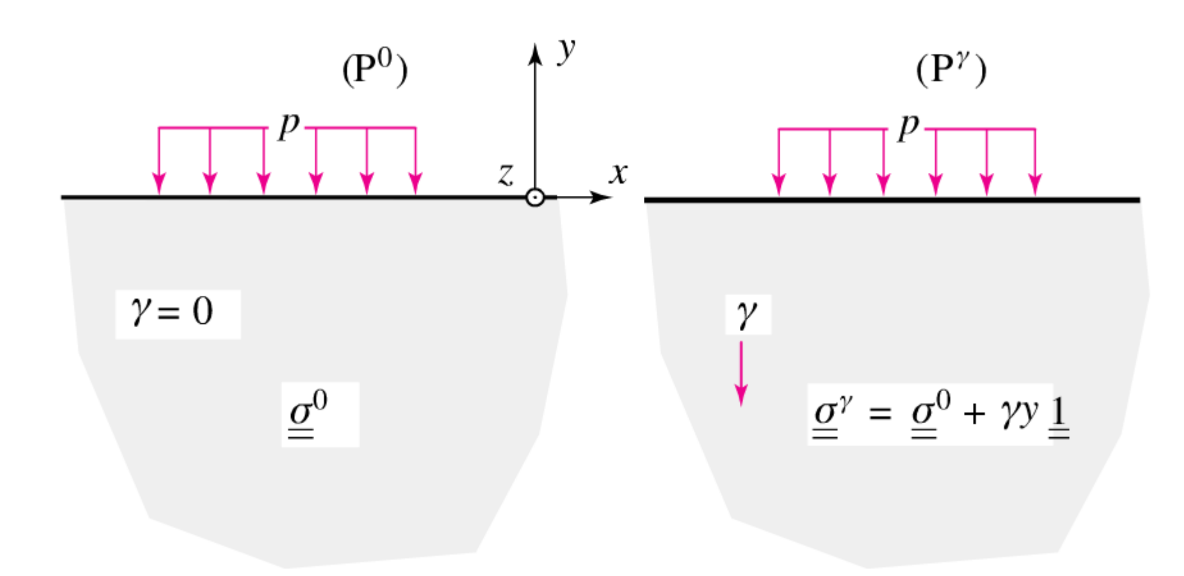


Figure 27.9 Problèmes de capacité portante avec et sans prise en compte de la pesanteur.

$\underline{\underline{\sigma}}^0$ étant un champ quelconque satisfaisant les conditions requises par (27.24), le champ défini par $\underline{\underline{\sigma}}^\gamma = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \gamma y \underline{\underline{1}}$ satisfera celles données par 27.25, puisque :

$$\begin{cases} \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^\gamma = \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\text{grad}}(\gamma y) = \gamma \underline{e}_y \\ \underline{\underline{\sigma}}^\gamma (y = 0) = \underline{\underline{\sigma}}^0 (y = 0) \\ \sigma_1^\gamma - \sigma_3^\gamma = \sigma_1^0 - \sigma_1^0. \end{cases} \qquad (27.26)$$

On aura donc :

$$p \leqslant p^0(0) \Leftrightarrow p \leqslant p^+(\gamma), \qquad (27.27)$$

soit encore :

$$p^0(\gamma) = p^0(0) = (\pi + 2)C, \qquad (27.28)$$

ce qui prouve que la capacité portante du massif de sol est indépendante de la pesanteur. La conclusion sera évidemment bien différente dans le cas par exemple où le sol obéit à un critère de résistance de Coulomb, où la pesanteur augmente la capacité portante du massif de sol.

27.4 Généralisation

La mise en œuvre des approches statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur a permis la détermination exacte de la capacité portante d'une fondation superficielle dans la cas particulier d'un chargement de type semelle filante sur un sol purement cohérent. Ce type d'analyse peut aisément se généraliser à des situations plus complexes : présence de plusieurs couches de sols cohérents et frottants, chargement inclinés et/ou excentrés, semelle de fondation circulaire ou rectangulaire, etc.

On observe généralement que, hormis dans les situations les plus simples telles celle que nous avons analysée en détail dans le présent chapitre, l'approche statique par l'intérieur est relativement malcommode à mettre en œuvre car elle nécessite d'exhiber *dans tout le massif* un champ de contrainte statiquement admissible et qui vérifie le critère en tout point. Tout comme dans les problèmes relatifs à l'analyse de stabilité de talus et de pentes, l'approche cinématique par l'extérieur se révèle en revanche beaucoup facile à utiliser, car présentant un caractère systématique. Il suffit en effet de considérer des classes de mécanismes dépendant d'un nombre limité de paramètres, par rapport auxquels une optimisation est effectuée par voie numérique.



Calculs de poussée et de butée

28 Introduction

Le dimensionnement d'ouvrages de soutènement, tels que les murs poids en béton, les parois moulées ou encore les rideaux de palplanches, exige de connaître les efforts exercés sur ce type d'ouvrage par le sol, compte tenu des capacités de résistance de ce dernier, de façon à en vérifier la stabilité globale. Se référant à la figure 28.1, extraite de Schlosser, 1990 [42], qui représente un mur de soutènement, ce dernier est notamment soumis à une force de poussée F_a s'exerçant sur la face amont du mur et qui tend à déstabiliser ce dernier, ainsi qu'à une force de butée F_p tendant à le retenir. L'objectif de ce chapitre est de déterminer, dans la configuration simplifiée d'un écran de soutènement vertical en contact avec un massif de sol purement frottant, de tels efforts en s'appuyant sur la théorie du calcul à la rupture.

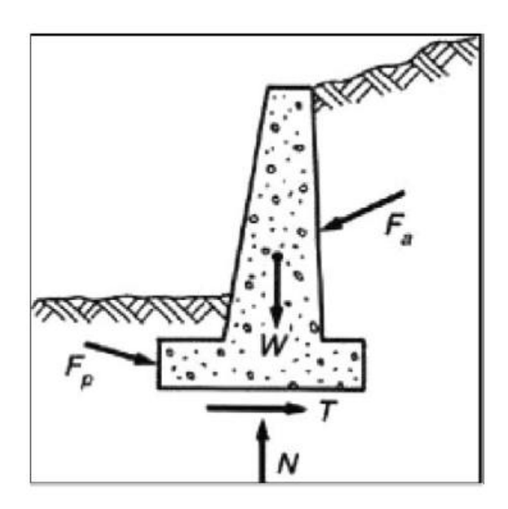


Figure 28.1 Sollicitations exercées sur un mur de soutènement (extrait de Schlosser [42]).

29 Coefficients de poussée et de butée d'un sol sur une paroi : l'exemple d'un massif de sol pulvérulent

Un massif de sol de hauteur H reposant sur un substratum horizontal est en contact avec un écran de soutènement vertical OA astreint à un mouvement de translation de vitesse horizontale égale à U (Fig. 29.1). Le sol est supposé être purement frottant (sable sec), sa résistance étant modélisée par un critère de Coulomb de cohésion nulle ($C = 0$) et d'angle de frottement interne égal à ϕ. On désigne par γ le poids volumique du sol. Le problème étant traité en déformations planes dans le plan $O\,x\,y$, les conditions aux limites sont les suivantes :

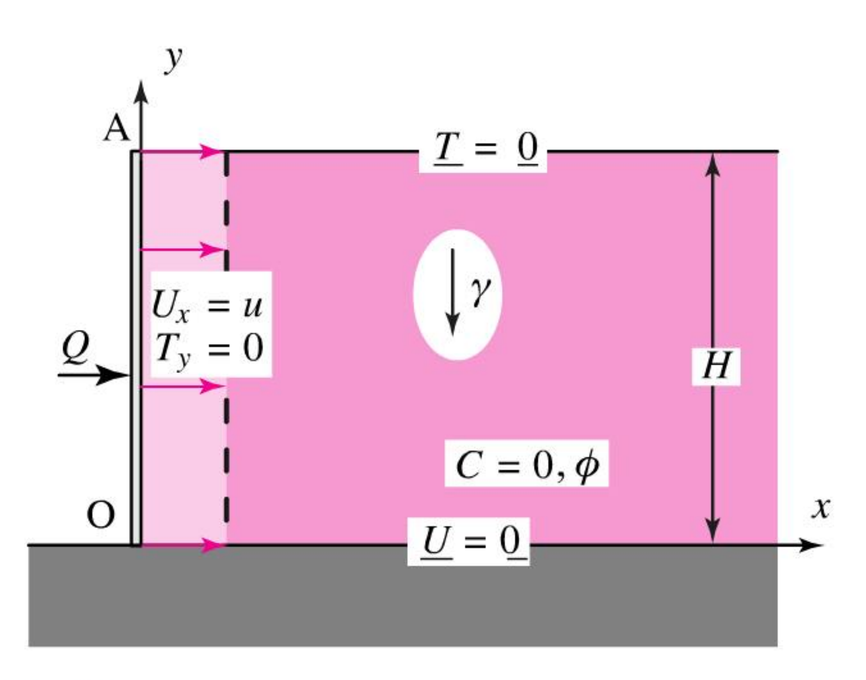


Figure 29.1 Position du problème d'un écran de soutènement en contact avec un massif de sol pulvérulent.

• Plan inférieur du massif en *contact parfaitement adhérent* avec le substratum :

$$\underline{U}(x > 0, y = 0) = 0. \tag{29.1}$$

• Plan supérieur du massif libre d'efforts :

$$\underline{T}(x > 0, y = H) = \underline{0}. \tag{29.2}$$

• Sol en contact lisse avec l'écran de soutènement :

$$U_x(x = 0, 0 \leqslant y \leqslant H) = U \; , \; T_y(x > 0, y = H) = 0. \tag{29.3}$$

29.1 Paramètres de chargement du système

Étant donné un champ de vitesse virtuel $\underline{\hat{U}}$ cinématiquement admissible quelconque, c'est-à-dire vérifiant les données aux limites en vitesse ci-dessus, la puissance des efforts extérieurs dans un tel champ s'écrit de façon générale :

$$P_e(\underline{\hat{U}}) = \int_\Omega \rho \underline{F} \,.\, \underline{\hat{U}} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \,.\, \underline{\hat{U}} \, da, \tag{29.4}$$

soit dans le cas présent, en raisonnant par unité de longueur dans la direction transversale Oz :

$$P_e(\underline{\hat{U}}) = \gamma \int_\Omega -\hat{U}_y \, d\Omega + \underbrace{\int_{OA} -\sigma_{xx} \, dy}_{Q} \, U, \tag{29.5}$$

où Q représente la projection horizontale de la résultante des efforts exercés *par la paroi de soutènement sur le massif de sol*. L'équation 29.5 met donc en évidence un *mode de chargement à deux paramètres* (Q,γ). On se propose de déterminer par la théorie du calcul à la rupture le domaine K des chargements potentiellement supportables.

29.2 Approche statique par l'intérieur

On considère la famille de champs de contrainte définie par (Fig. 29.2a) :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(y)\,,\, \sigma_{yy} = \sigma_{zz}\gamma(y - H)\,,\, \text{autres } \sigma_{ij} = 0, \qquad (29.6)$$

ces champs de contrainte étant bien évidemment en équilibre avec le poids volumique γ du sol et respectant également les conditions aux limites en efforts indiquées ci-dessus. Ils sont par ailleurs en équilibre avec une valeur de l'effort qu'exerce l'écran de soutènement sur le sol égale à :

$$Q = -\int_0^H \sigma_{xx}(y)\, dy. \qquad (29.7)$$

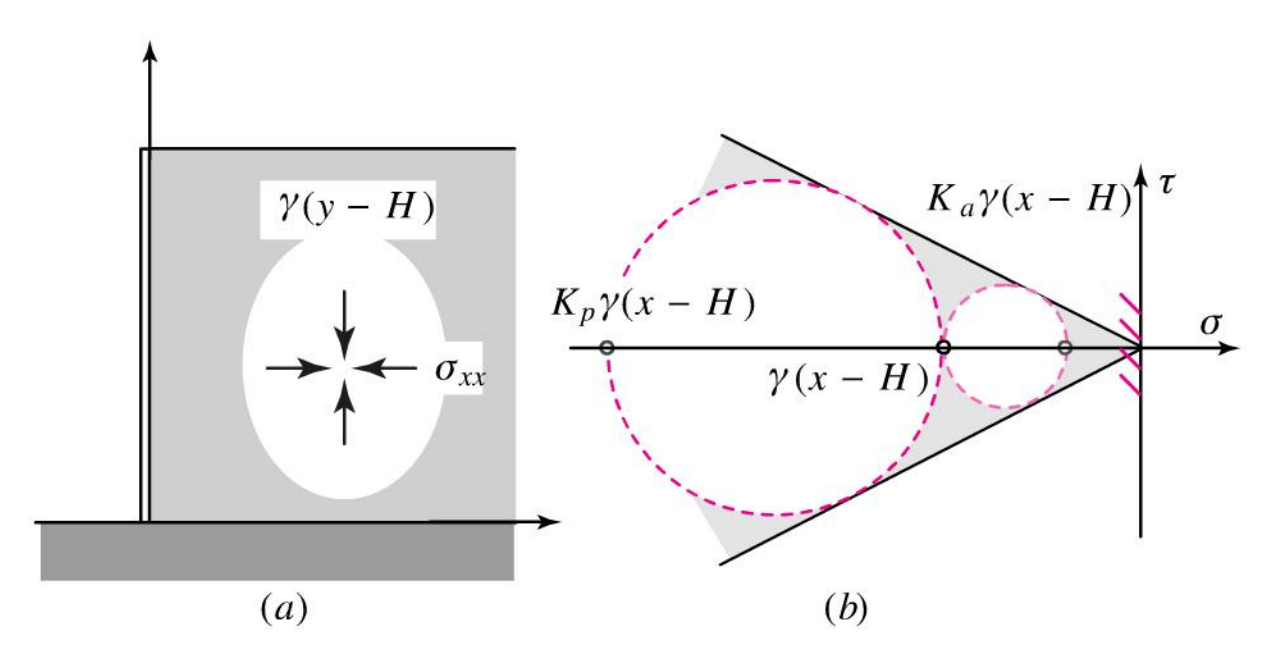


Figure 29.2 Approche statique par l'intérieur.

Le sol étant sans cohésion, son critère de résistance s'écrit :

$$\sigma_1(1 + \sin\phi) - \sigma_3(1 - \sin\phi) \leqslant 0, \qquad (29.8)$$

où $\sigma_1 \geqslant \sigma_3$ sont les contraintes principales extrêmes. Deux cas sont à considérer :

a) $\sigma_1 = \sigma_{xx}(y) \geqslant \gamma(y - H) = \sigma_3$. La condition de résistance s'écrit alors :

$$\sigma_{xx}(y) \leqslant K_a \gamma (y - H), \qquad (29.9)$$

où K_a représente le *coefficient de poussée*, défini par :

$$K_a = \frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (29.10)$$

Le cercle de Mohr relatif à l'état de contrainte dans le cas où l'inégalité (29.8) est une égalité, est représenté sur la figure 29.2b. Il est tangent à la courbe intrinsèque.

b) $\sigma_3 = \sigma_{xx}(y) \leqslant \sigma_{yy} = \gamma(y - H) = \sigma_1$. La condition de résistance devient :

$$\sigma_{xx}(y) \geqslant K_p \gamma (y - H), \qquad (29.11)$$

où K_p représente le *coefficient de butée*, défini par :

$$K_p = \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{K_a}. \qquad (29.12)$$

Le cercle de Mohr associé à cet « état limite de butée » est représenté sur la même figure 29.2b.

Il en résulte que la famille de champs de contrainte considérée respecte le critère de résistance du sol en tout point si et seulement si la double inégalité suivante est satisfaite :

$$0 \leqslant y \leqslant H;\ K_a \gamma (y - H) \geqslant \sigma_{xx}(y) \geqslant K_p \gamma (y - H), \qquad (29.13)$$

et la valeur correspondante de l'effort Q varie dans l'intervalle :

$$\begin{aligned} \gamma K_a \int_0^H (H - y)\, dy &= \frac{1}{2} K_a \gamma H^2 \leqslant Q \\ &\leqslant \gamma K_p \int_0^H (H - y) dy = \frac{1}{2} K_p \gamma H^2. \end{aligned} \qquad (29.14)$$

Nous obtenons ainsi une approche par l'intérieur du domaine K :

$$\frac{1}{2}K_a\gamma H^2 \leqslant Q \leqslant \frac{1}{2}K_p\gamma H^2 \Rightarrow (Q,\gamma) \in K \tag{29.15}$$

29.3 Approche cinématique par l'extérieur

Cette approche est mise en œuvre en considérant les deux mécanismes par bloc en translation suivants, représentés sur la figure 29.3 et respectivement notés (a) et (b). Le mécanisme (a) correspond à un bloc triangulaire OAB, d'angle en O égal à $\pi/4 - \phi/2$, animé d'un mouvement de translation de vitesse U orientée vers le bas et formant un angle ϕ avec le segment AB. La discontinuité de vitesse le long de AB entre le bloc et le reste du massif étant pertinente, et la cohésion étant nulle, la puissance résistante maximale correspondante est également nulle :

$$P_{rm}(\underline{\hat{U}}) = 0. \tag{29.16}$$

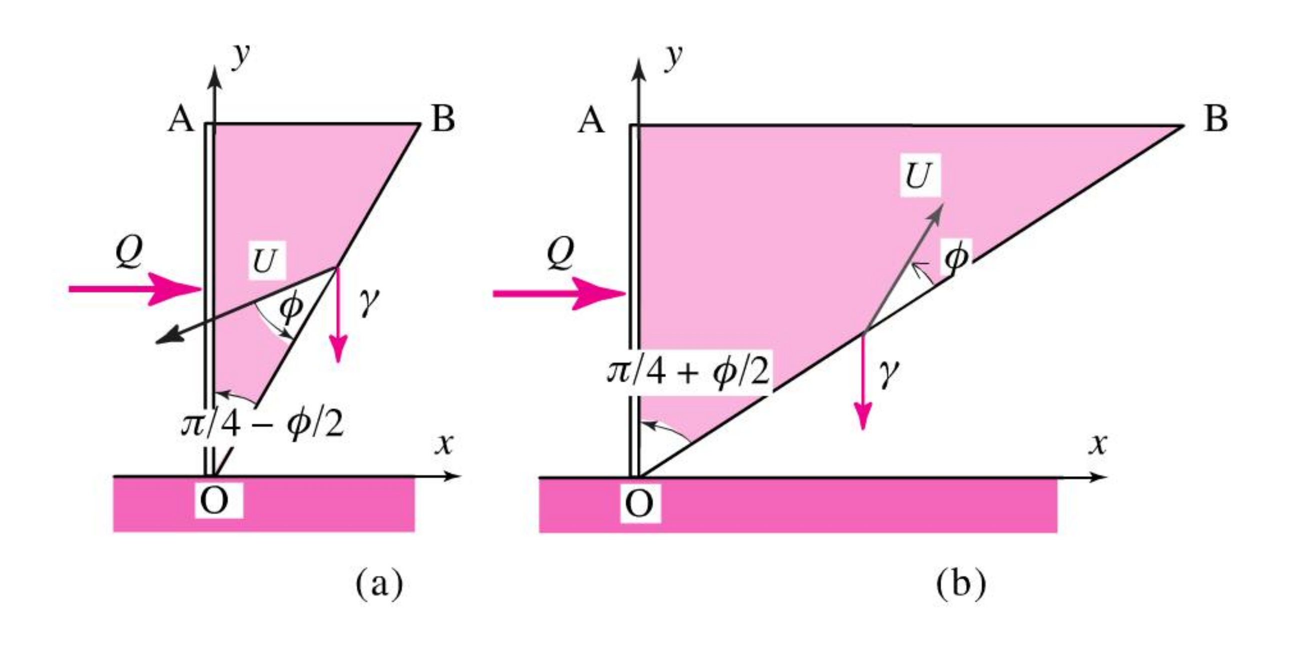


Figure 29.3 Approche cinématique par l'extérieur.

29

Par ailleurs la puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit :

$$\begin{aligned} P_e(\underline{\hat{U}} &= \frac{1}{2}\gamma H^2 \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)U \\ &- QU\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right), \end{aligned} \quad (29.17)$$

de sorte que la condition nécessaire de stabilité s'écrit en simplifiant par $U > 0$:

$$(Q,\gamma) \in K \Rightarrow P_e(\underline{\hat{U}}) \leqslant P_{rm}(\underline{\hat{U}}) = 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}K_a\gamma H^2. \quad (29.18)$$

Considérons maintenant le mécanisme (b) où un bloc triangulaire OAB, d'angle en O égal à $\pi/4 + \phi/2$, animé d'un mouvement de translation de vitesse U orientée vers le haut et inclinée d'un angle ϕ avec le segment AB, de sorte que la puissance résistante maximale correspondante est nulle. La puissance virtuelle des efforts extérieurs dans ce second mécanisme vaut :

$$\begin{aligned} P_e(\underline{\hat{U}}) &= \frac{1}{2}\gamma H^2 \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)U \\ &+ QU\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right) \end{aligned} \quad (29.19)$$

et la condition nécessaire de stabilité déduite de l'approche cinématique par l'extérieur devient :

$$(Q,\gamma) \in K \Rightarrow P_e(\underline{\hat{U}}) \leqslant P_{rm}(\underline{\hat{U}}) = 0 \Leftrightarrow Q \leqslant \frac{1}{2}K_p\gamma H^2. \quad (29.20)$$

En combinant les équations 29.18 et 29.20, il vient alors :

$$(Q,\gamma) \in K \Rightarrow \frac{1}{2}K_p\gamma H^2 \leqslant Q \leqslant \frac{1}{2}K_a\gamma H^2. \quad (29.21)$$

En associant ce résultat à celui donné par l'approche par l'intérieur (29.15) :

$$(Q,\gamma) \in K \Leftrightarrow \frac{1}{2}K_p\gamma H^2 \leqslant Q \leqslant \frac{1}{2}K_{p},\gamma H^2 \qquad (29.22)$$

on aboutit à la détermination exacte du domaine de stabilité K représenté sur la figure 29.4.

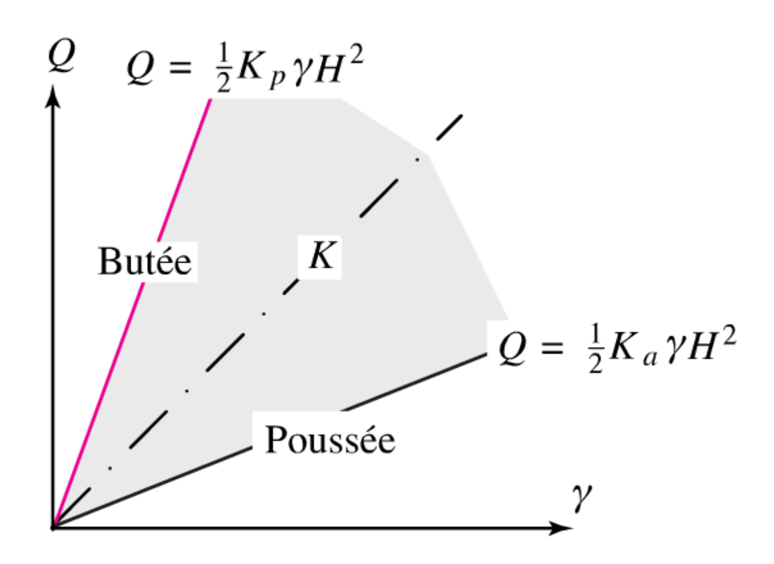


Figure 29.4 Domaine de stabilité de la paroi de soutènement dans le plan des paramètres de chargement.

29.4 Commentaires

L'exemple que nous venons de traiter montre que le formalisme du calcul à la rupture permet de clarifier les notions de poussée et de butée d'un sol sur une paroi ou plus généralement un ouvrage de soutènement. Il convient notamment d'observer que ces notions de poussée et de butée ne sont pas des concepts « intrinsèques », mais se réfèrent aux efforts maximaux qu'une sol est susceptible d'exercer sur la paroi, eu *égard au mouvements possibles de cette dernière*. En d'autres termes, et contrairement à ce qui est le plus souvent implicitement admis dans les méthodes de dimensionnement classiques, ces efforts ne sont pas des chargements extérieurs donnés, mais des efforts intérieurs au système « massif de sol+soutènement », dont on évalue les contributions maximales compte tenu de la résistance du sol.

La figure 29.5 ci-dessous montre l'exemple d'une paroi de soutènement encastrée dans le sol en partie inférieure, et dont on examine la stabilité. Tandis que la méthode classique consiste à examiner l'équilibre de la paroi soumise aux efforts de poussée et de butée exercés par le sol placé respectivement en amont et en aval de la paroi, l'approche calcul à la rupture se propose d'analyser globalement le système complet « sol+paroi » compte tenu des critères de résistance respectifs des différents éléments : le sol lui même, mais également la paroi, pouvant être modélisée comme une poutre en flexion, ainsi que les interfaces sol/paroi. Cette même figure montre un mécanisme de ruine possible de l'ouvrage formé de deux blocs triangulaires en translation, mais d'autres mécanismes faisant par exemple intervenir un basculement de la paroi par rotation autour de son pied peuvent être considérés.

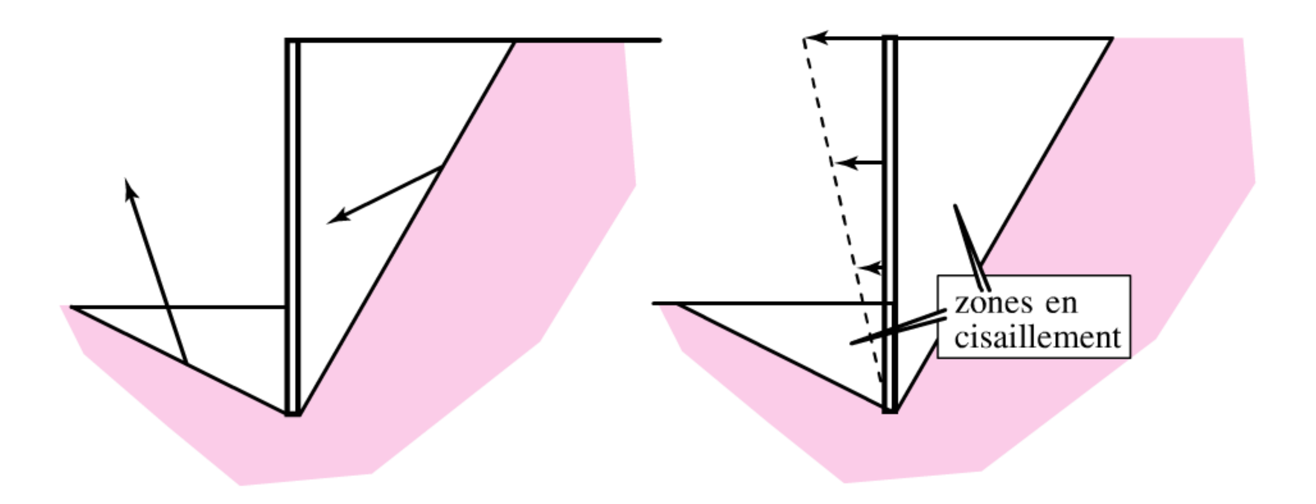


Figure 29.5 Mécanismes de ruine possibles d'un écran de soutènement.

Bibliographie

[1] Anthoine A., « Une méthode pour le dimensionnement à la rupture des ouvrages en sols renforcés », *Revue française de géotechnique*, 50, 1990, 5-17.

[2] Bardet J. P., *Experimental soil mechanics*, Prentice Hall Inc., 380 p., 1990.

[3] Baron R.A., « *Consolidation of fine-grained soils by sand drained wells* », *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 113, 1948, 1718.

[4] Blondeau F., « Les méthodes d'analyse de stabilité », *Bull. LCPC*, numéro spécial, 1976, 56-62.

[5] Brown G., Summary of Darcy's Experiments, http://biosystems.okstate.edu/darcy/Summary.htm (site visité le 25 janvier 2007).

[6] de Buhan P., *Plasticité et calcul à la rupture*, Presses de l'ENPC, 2007.

[7] de Buhan P., Dormieux L., Salençon J., « *An interactive computer software for the yield design of reinforced soil structures* », Coll. Int. « Informatique et géotechnique » Press, Éd. Presses de l'ENPC, 1993, 181-189.

[8] Cordary D., *Mécanique des sols*, Éditions Tec&Doc – Lavoisier, 1994.

[9] Costet J., Sanglerat G., *Cours pratique de mécanique des sols* (2 tomes), Éditions Dunod, 1993 (épuisé).

[10] Coussy O., *Mécanique des milieux poreux*, Éditions Technip, 437 p., 1991.

[11] Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon ; exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de la distribution d'eau*, Paris, V. Dalamont éd., Successeur de Carilian-Gaery et Vor Dalmont, Librairie des corps impériaux des ponts et chaussées et des mines, Quai des Augustins, 49, 1856.

[12] Delattre L., « Un siècle de méthodes de calcul d'écrans de soutènement », *Bulletin des laboratoires des Ponts et Chaussées*, 234, 2002, 35-56.

[13] Deveughele M., *Notions de minéralogie et de pétrographie*, Centre commun à l'école des Mines de Paris et à l'école des Ponts et Chaussées, sept. 1988.

[14] Dormieux L., Bourgeois E., *Introduction à la mécanique des milieux poreux*, Presses de l'ENPC, 2002.

[15] Durville J.L., Sève G., « Stabilité des pentes. Glissements en terrain meuble », *Techniques de l'Ingénieur*, C254, 1996, 1-15.

[16] Duvaut G., *Mécanique des milieux continus*, collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Éditions Dunod, 1998.

[17] Frank R., « Calculs des fondations superficielles », *Techniques de l'Ingénieur*, traité Construction, C246, 1998, 1-28.

[18] Germain P., Muller P., *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Éditions Masson 2e édition, 1997.

[19] Gervreau É., *Géotechnique, Mécanique des sols ; Calcul des ouvrages* (2 tomes différents), Gaëtan Morin Éd., 1998.

[20] Grédiac M., Hild F., *Mesures de champs et identification en mécanique des solides*, Éd. Lavoisier, 2011.

[21] Habib O., *Précis de géotechnique*, Éditions Dunod, 1973.

[22] Halphen B., Salençon J., *Élastoplasticité*, Presses de l'ENPC, Paris, 1987.

[23] Lancellota R., *Geotechnical Engineering*, Ed. Balkema, 1995.

[24] LCPC, *Hydraulique des sols*, rapport LCPC, numéro spécial, 1990.

[25] Lee K. L., Seed H. B., *Drained strength characteristics of sands, J. Soil Mech. Found. Div.*, ASCE, 93, 1967, 117-141.

[26] Magnan J.-P., « Description, identification et classification des sols », *Techniques de l'Ingénieur*, C208, 1-16.

[27] Mitchell J.K., *Fundamental of soil behaviour*, John Wiley & Sons, 1976.

[28] Modaressi A., Cours de mécanique des sols, ECP, http://www.master-gce.ecp.fr

[29] Nova R., *Fondations de la mécanique des sols*, Hermes Lavoisier, 420 p., 2005.

[30] Pailleret G., Cours de mécanique des sols, polycopié ENS Cachan, 1980.

[31] Philipponnat G., Hubert B., *Fondations et ouvrages en terre*, Eyrolles (2e édition), 550 p., 2000.

[32] Plumelle C., Cours de mécanique des sols du CNAM, www.cnam.fr

[33] Raulin T., Rouques G., Toubel A., *Calcul de stabilité des pentes en rupture non circulaire*, Rapport de recherche, LPC, 38, 1974.

[34] Reiffsteck P., cours à disposition sur http://www.geotech-fr.org

[35] Rutledge P.C., « *Closing discussion on Relation of undisturbed sampling to laboratory testing* », Tr. Am. Soc. C.E., vol. 109, 1994, p. 1208.

[36] Salençon J., *Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*, Eyrolles, 1974.

[37] Salençon J., *Calcul à la rupture et analyse limite*, Presses de l'ENPC, 1983.

[38] Salençon J., « *An introduction to the yield design theory and its application to soil mechanics* », *Eur. J. Mech. A/Solids*, 9, 5, 1990, 477-500.

[39] Salençon J., *Mécanique des milieux continus*, Éditions de l'École polytechnique, 2000.

[40] Sanglerat G., Olivari G., Cambou B., *Problèmes pratiques de mécanique des sols et de fondations* (tomes 1 et 2), Éditions Dunod., 1980.

[41] Schlosser F., *Éléments de mécanique des sols*, Presses de l'ENPC, 276 p., 1988.

[42] Schlosser F., « Ouvrages de soutènement. Poussée et butée », *Techniques de l'Ingénieur*, traité Construction, C242, 1990, 1-17.

[43] Simon B., *Applications du calcul à la rupture aux soutènements, ELU-ELS*, Éditions du LCPC, 2006, 395-402.

[44] Skempton A.W., « *The colloidal activity of clays* », *Proceedings of the third International Conference on Soil Mechanics and Fondatation Engineering*, 1, 1953, 57-61.

[45] Smith G.N., Smith Ian G.N., *Elements of Soil Mechanics*, Blackwell Science (7th ed.), 494 p., 2000.

[46] Tatsuoka F., *Impacts on geotechnical engineering of several recent findings from laboratory stress-strain tests on geomaterials*, The 2000 Burmister Lecture, http://geotle.t.utokyo.ac.jp/tatsuoka/lecture/Burmister00/Burmister.html. Voir également tous les articles de cet auteur dans *Soils and Foundations* (revue japonaise).

[47] *Techniques de l'Ingénieur*, 2006 : Tous les articles rédigés sur la mécanique des sols (une quinzaine d'articles), http://www.techniques-ingenieur.fr

[48] Terzaghi K., Peck R. B., *Soil mechanics in engineering practice*, John Wiley & Sons, New York, First edition 1948 and second edition 1967.

[49] http://www.mineralogie.org

[50] http://www.argiles.fr

[51] www3.imperial.ac.uk

Index